

#### EACH DAY HUMBLE SUPPLIES ENOUGH ENERGY TO MELT 7 MILLION TONS OF GLACIER!

This giant glacier has remained unmelted for centuries. Yet, the petroleum energy Humble supplies—it converted into heat—could melt it at the rate of 80 tons each second! To meet the nation's growing needs for energy, Humble has applied science to nature's resources to become America's Leading Energy Company. Working wonders with oil through research, Humble provides energy in many forms—to help heat our homes, power our transportation, and to furnish industry with a great variety of versatile chemicals. Stop at a Humble station for new Enco Extra gasoline, and see why the "Happy Motoring" Sign is the World's First Choice!



From Life Magazine 1962. Slide courtesy by S. Salter.

# Der Klimawandel – Was weiß die Wissenschaft und was nicht?

Hauke Schmidt

Max-Planck-Institut für Meteorologie, Hamburg, Germany

Bad Honnef, März 2019

#### Inhalt



- Grundlagen
  - Was ist Klima?
  - Die atmosphärische Energiebilanz
- Der aktuelle Stand der Klimaforschung
  - Beobachtungen
  - Ursachen von Klimaveränderungen
  - Modelle
  - Projektionen



#### Wetter und Klima



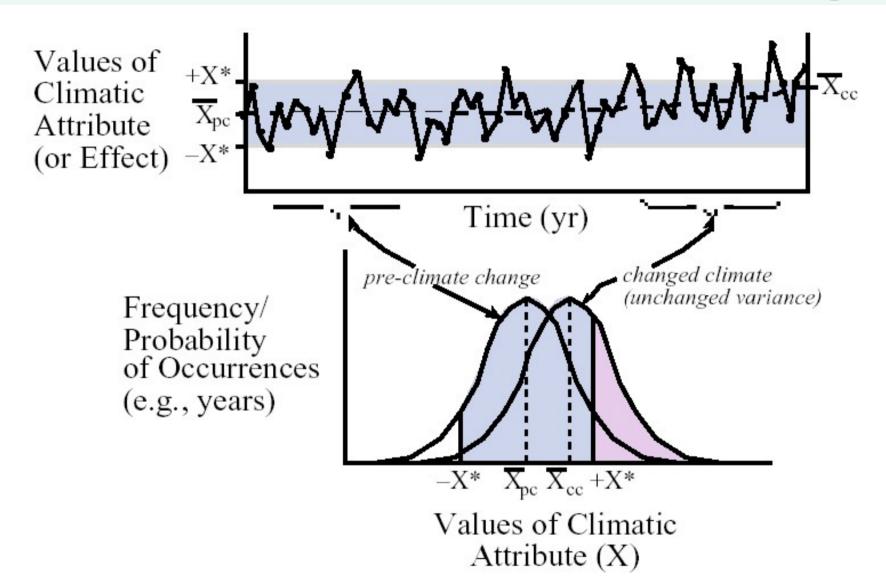
# "Climate is what you expect, weather is what you get."

(Robert A. Heinlein, 1907-1988, amerikanischer Schriftsteller)



#### Klima als Häufigkeitsverteilung







#### Alexander von Humboldt: Klima



"Das Wort Klima bezeichnet allerdings zuerst eine spezifische Beschaffenheit des Luftkreises, aber diese Beschaffenheit ist abhängig von dem perpetuierlichen Zusammenwirken einer allund tiefbewegten, durch Strömungen von ganz entgegengesetzter Temperatur durchfurchten Meeresfläche mit der wärmestrahlenden trockenen Erde: die mannigfaltig gegliedert, erhöht, gefärbt, nackt, oder mit Wald und Kräutern bedeckt ist."

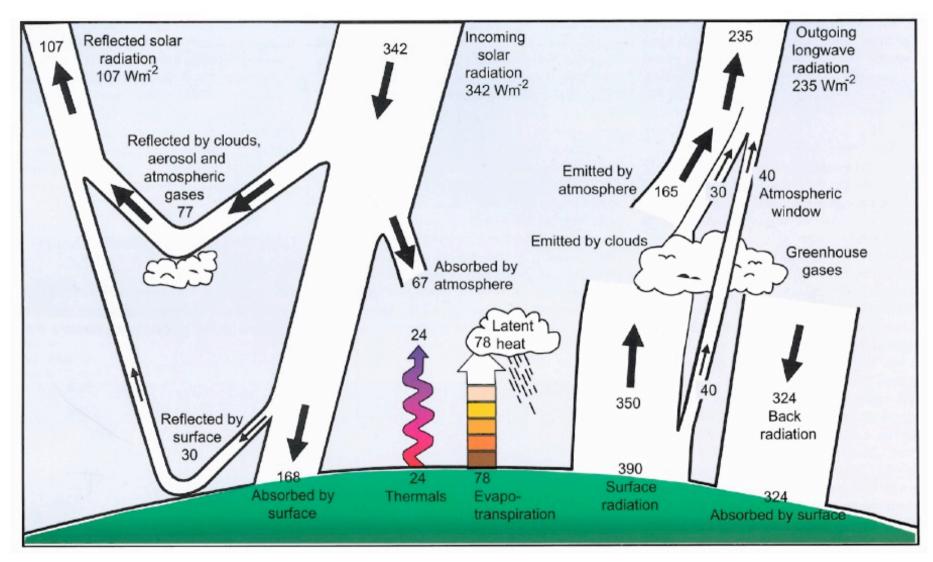
A. v. Humboldt, "Kosmos – Entwurf einer physischen Weltbeschreibung", 1845-1862





## Das Energiebudget der Erdatmosphäre







#### IPCC – der "Weltklimarat"



IPCC: Intergovernmental Panel on Climate Change

Erstmals zusammengerufen 1988 von WMO und UNEP

Das IPCC organisiert sich in drei Arbeitsgruppen:

- Arbeitsgruppe I befasst sich mit den naturwissenschaftlichen Aspekten des Klimasystems und der Klimaänderung.
- Arbeitsgruppe II befasst sich mit der Verwundbarkeit von sozioökonomischen und ökologischen Systemen durch Klimaänderungen.
- Arbeitsgruppe III befasst sich mit Maßnahmen zur Eindämmung des Klimawandels.

Etwa alle 6 Jahre werden Berichte erstellt, die den Stand der Wissenschaft in den drei Teilbereichen zusammenfassen. Daran sind Hunderte von Wissenschaftlern beteiligt. Der sogenannte "Fünfte Assessement Report" (AR5) erschien 2013/14.

Downloads: www.ipcc.ch





# Der aktuelle Stand der Klimaforschung



WORKING GROUP I CONTRIBUTION TO THE IPCC AR5 CLIMATE CHANGE 2013: THE PHYSICAL SCIENCE BASIS

(http://www.ipcc.ch)





### Unsicherheiten – Die Sprache des IPCC



| Agreement <b>──→</b> | High agreement<br>Limited evidence            | High agreement<br>Medium evidence   | High agreement<br>Robust evidence   |                     |
|----------------------|---|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------|
|                      | Medium agreement<br>Limited evidence          | Medium agreement<br>Medium evidence | Medium agreement<br>Robust evidence |                     |
|                      | Low agreement<br>Limited evidence             | Low agreement<br>Medium evidence    | Low agreement<br>Robust evidence    | Confidence<br>Scale |
|                      | Evidence (type, amount, quality, consistency) |                                     |                                     |                     |

The following terms have been used to indicate the assessed likelihood, and typeset in italics:

| Term*                  | Likelihood of the outcome |
|------------------------|---------------------------|
| Virtually certain      | 99-100% probability       |
| Very likely            | 90-100% probability       |
| Likely                 | 66-100% probability       |
| About as likely as not | 33–66% probability        |
| Unlikely               | 0–33% probability         |
| Very unlikely          | 0-10% probability         |
| Exceptionally unlikely | 0-1% probability          |
|                        |                           |

<sup>\*</sup> Additional terms (*extremely likely*: 95–100% probability, *more likely than not*: >50–100% probability, and *extremely unlikely*: 0–5% probability) may also be used when appropriate.



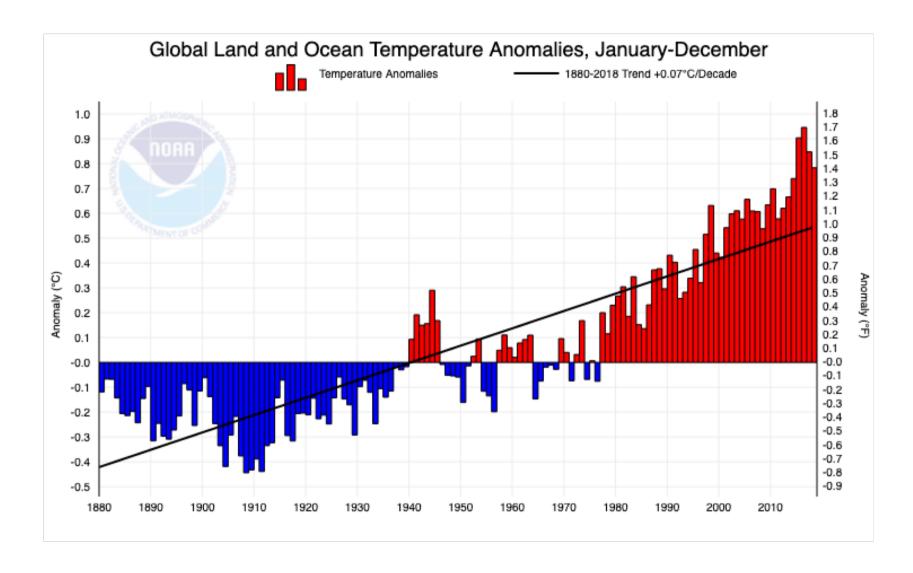


# Beobachtete Klimaänderungen



#### Bodennahe Lufttemperaturen 1880-2018 - Global

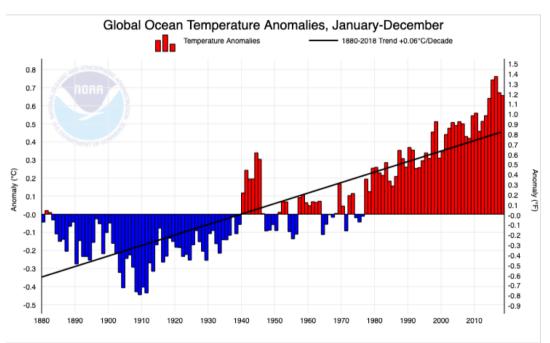


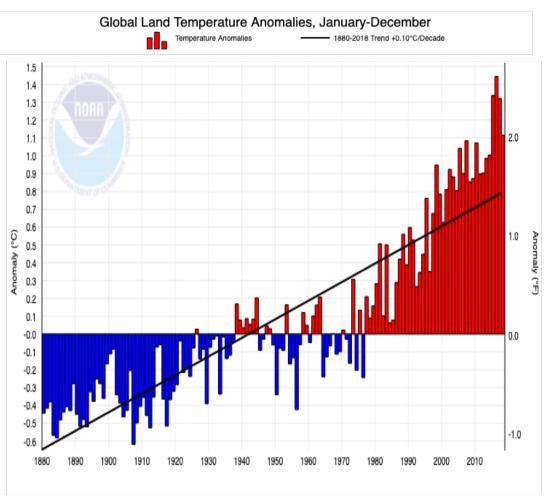




# Erwärmung über Ozean und Land



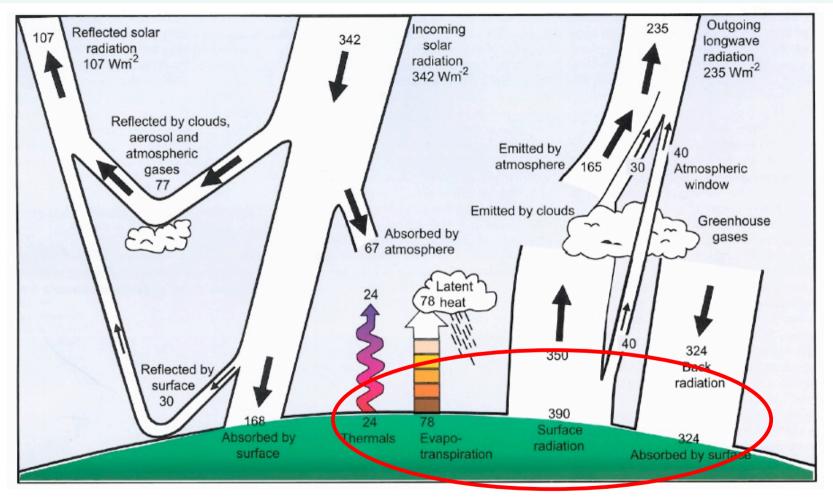






#### Warum ist die Erwärmung über Land größer als über Ozeanen?





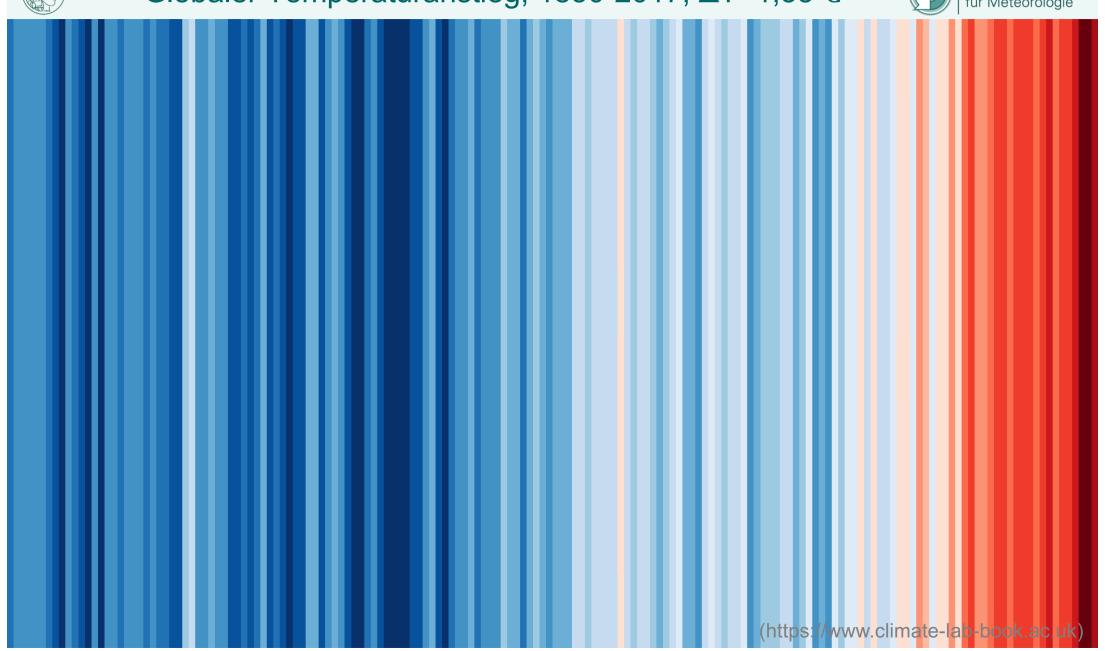
(Kiehl and Trenberth, 1997)

Erhöhte langwellige Einstrahlung am Boden wird durch Erwärmung kompensiert, da diese zu mehr langwelliger Ausstrahlung, sowie mehr sensiblem und latentem Wärmetransport führt. Über trockenen Landregionen ist die Verdunstung und damit die latente Wärme limitiert.



# Globaler Temperaturanstieg, 1850-2017, ΔT=1,35°C

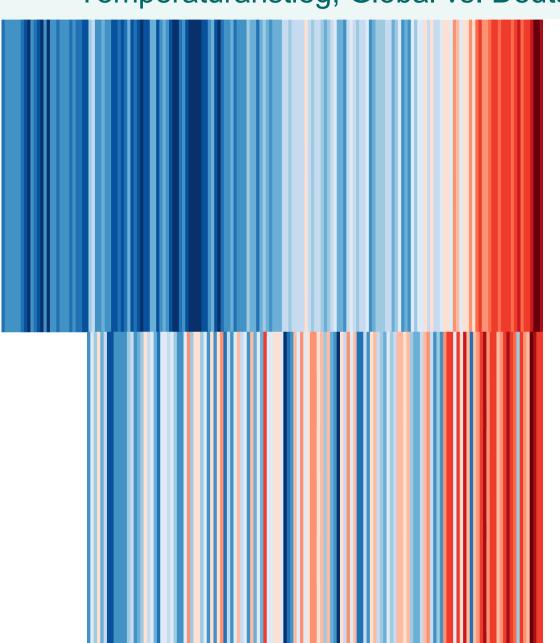






# Temperaturanstieg, Global vs. Deutschland





global, 1850-2017, ΔT=1,35°C

Deutschland, 1881-2017, ΔT=3,7°C)

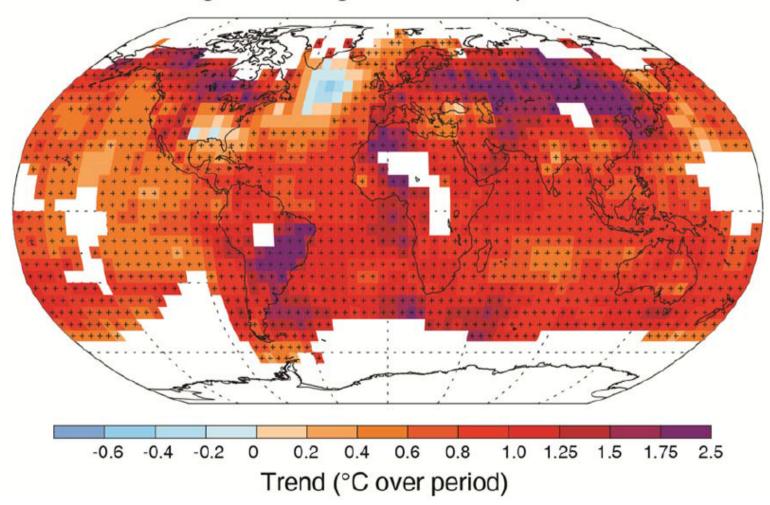
(https://www.climate-lab-book.ac.uk)



# Beobachteter regionaler Temperaturanstieg



(b) Observed change in average surface temperature 1901–2012

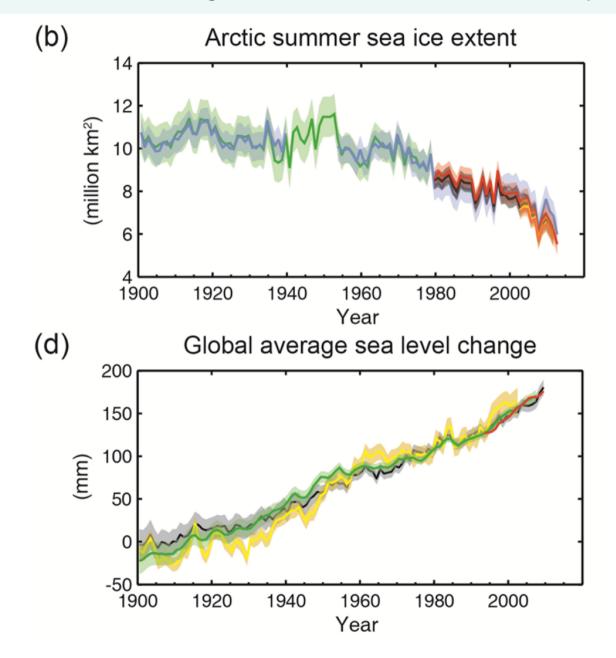


(IPCC AR5, SPM, 2013)



#### Beobachtungen: Arktisches Meereis, Meeresspiegel



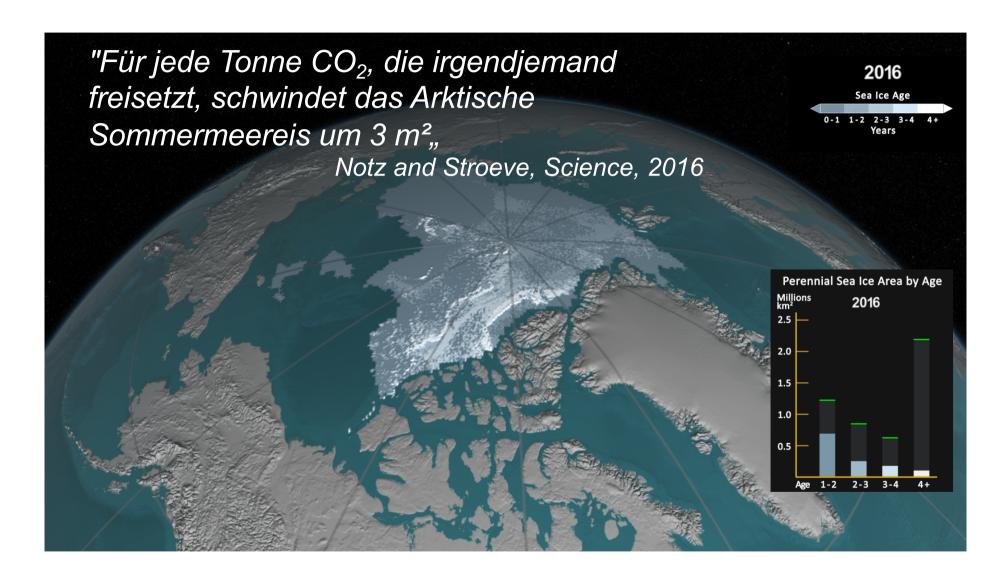


(IPCC AR5, SPM, 2013)



#### Beobachtungen: Arktisches Meereis, September



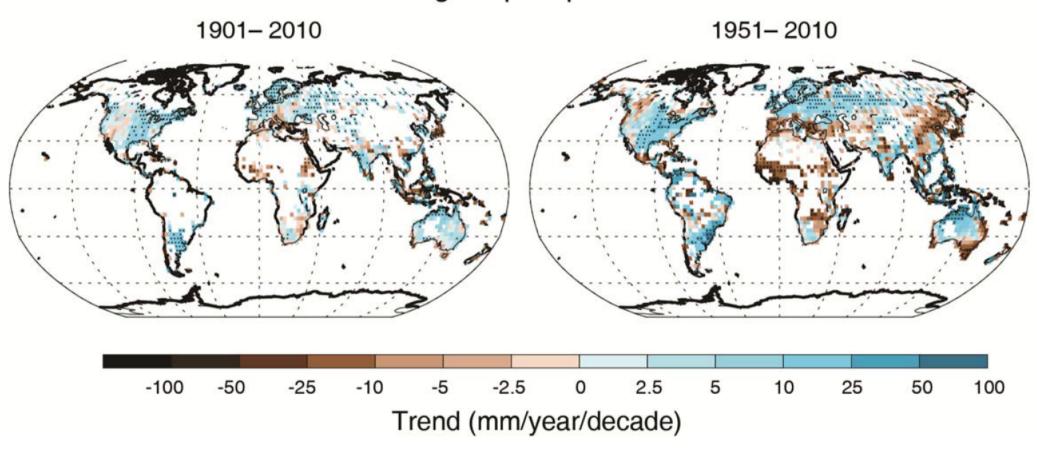




#### Beobachtete regionale Niederschlagsänderungen



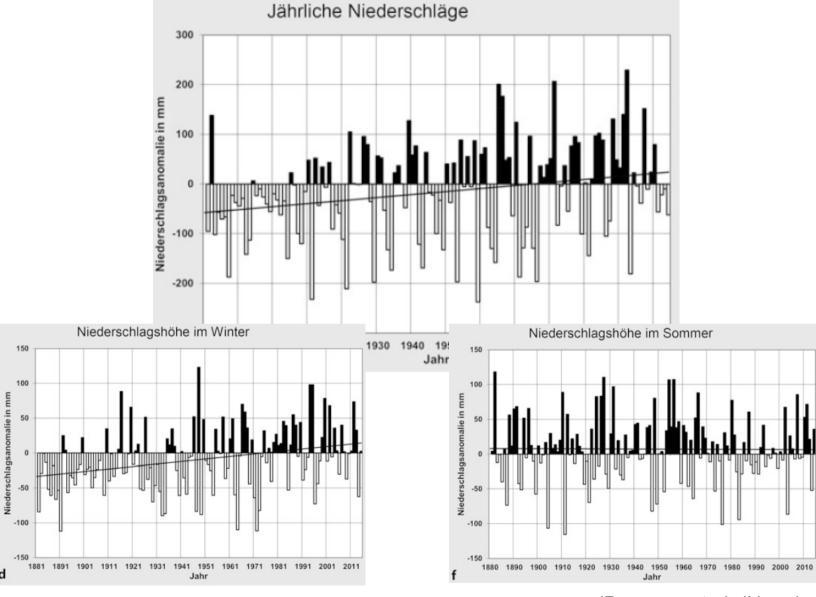
#### Observed change in precipitation over land





### Niederschlag - Deutschland







# Ursachen für Klimaänderungen





#### Natürliche Klimaantriebe

- Vulkanausbrüche
- Schwankungen der Sonnenaktivität
- Veränderung der Erdumlaufbahn um die Sonne

#### Anthropogene Klimaantriebe

- Verbrennung fossiler Brennstoffe (Erdöl, Erdgas, Kohle)
   (z.B. CO<sub>2</sub>, Schwefeldioxid, Schmutzpartikel (=Aerosole))
- Emission von Methan (z.B. aus Rinder- und Schafzucht; Reisfeldern, defekten Erdgasleitungen)
- Landnutzungsänderungen (z.B. Abholzung, Brandrodung, Urbanisierung)



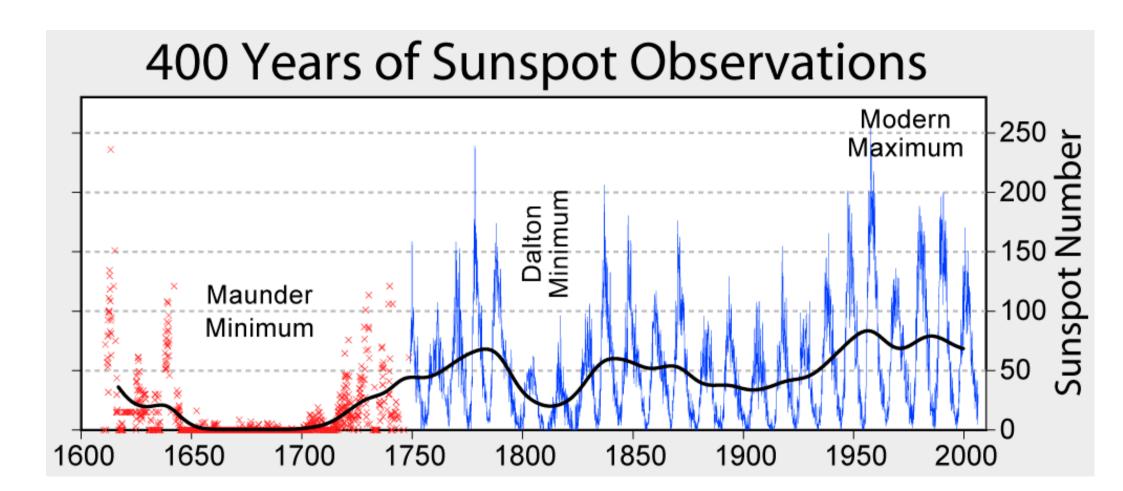
#### Die Pinatubo-Eruption









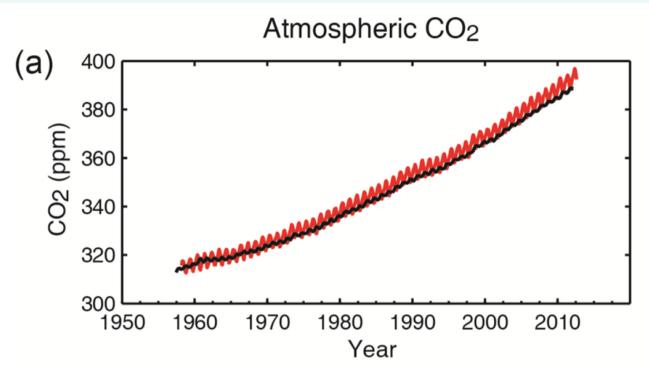


(source: Wikipedia)

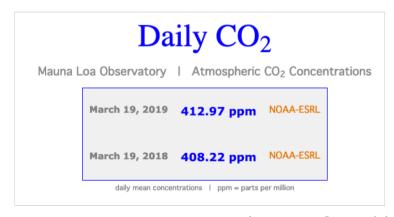


## CO<sub>2</sub> in der Atmosphäre





(IPCC AR5, SPM, 2013)

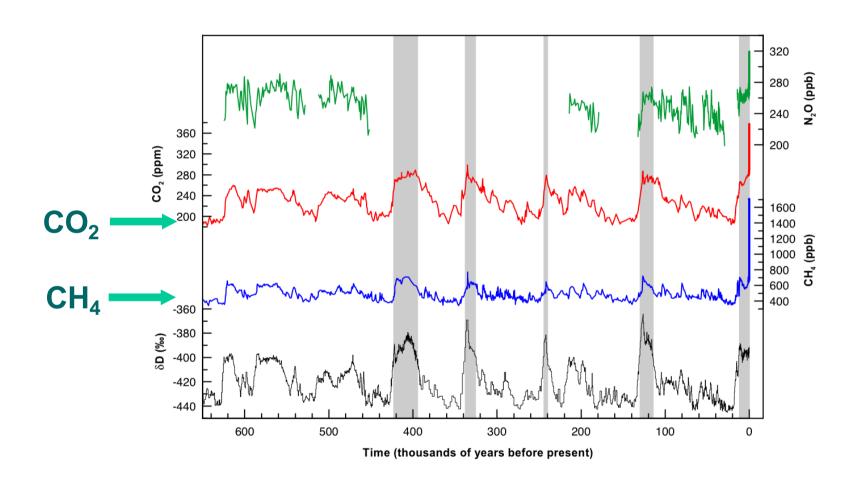


(www.co2.earth)



# Treibhausgase in Eisbohrkernen







### Svante Arrhenius (1859-1927)





THE

LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN

PHILOSOPHICAL MAGAZINE

JOURNAL OF SCIENCE.

[FIFTH SERIES.]

APRIL 1896.

XXXI. On the Influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature of the Ground. By Prof. SVANTE ARRHENIUS \*.

One may now ask, How much must the carbonic acid vary according to our figures, in order that the temperature should

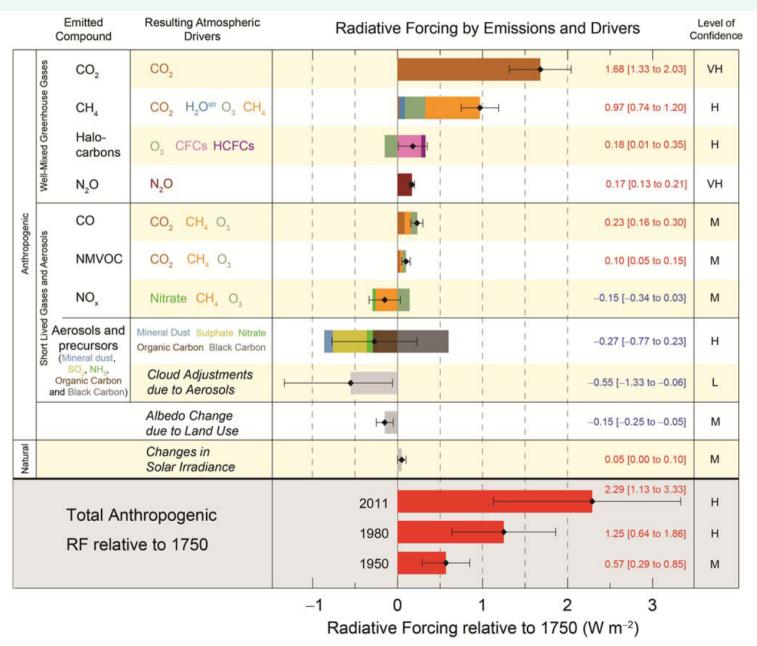
See Tyndall Lecture by Raymond Pierrehumbert, AGU, 2012: https://www.youtube.com/watch?v=RICBu\_P8JWI

In order to get the temperature of the ice age between the 40th and 50th parallels, the carbonic acid in the air should sink to 0.62-0.55 of its present value (lowering of temperature 4°-5° C.). The demands of the geologists, that at the genial



#### Der Strahlungsantrieb des Klimasystems







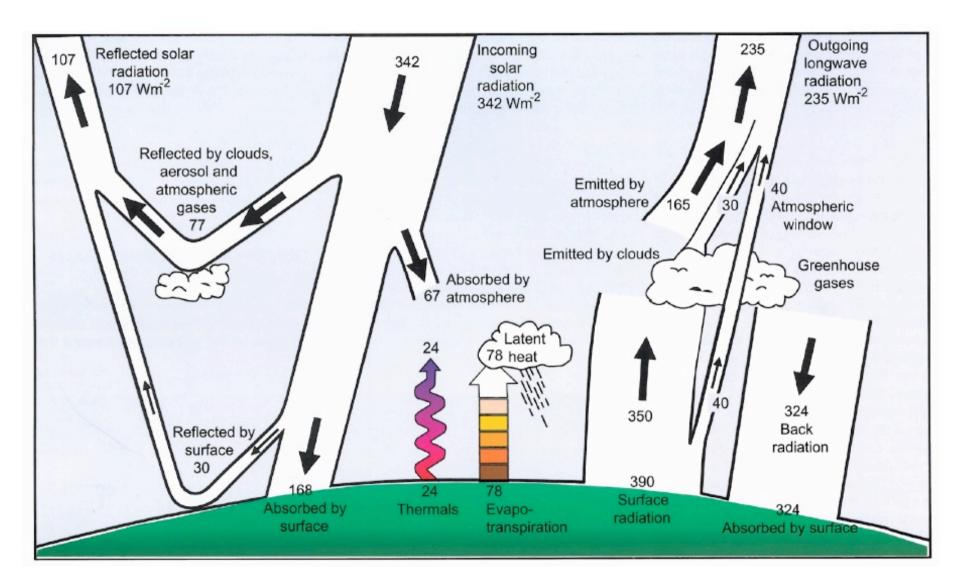


# Klimamodelle



# Radiative-Convective Equilibrium

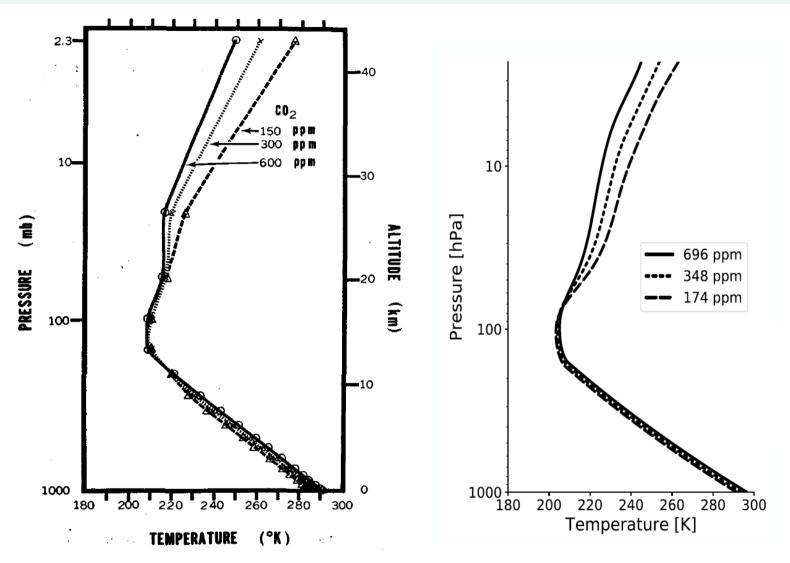






#### Eine bemerkenswert robuste Vorhersage in einem RCE-Modell





Manabe & Wetherald (JAS, 1967) berechneten eine Erwärmung von 2,7 K bei einer Verdopplung des atmosphärischen CO2-Gehalts. Wir (Kluft et al., eingereicht, 2019) haben Ihre Berechnungen wiederholt und kommen auf 2,8 K.



#### Modellgleichungen für Atmosphäre (und Ozean)



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(f + \xi)\mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla K - \dot{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} - \frac{R_d T}{p} \nabla p - \nabla \phi + \mathbf{F_v}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T - \dot{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{R_d T}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t} + F_T$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{R_d T}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) + F_{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(c_i \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{v} c_i \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} c_i \frac{\partial p}{\partial \eta}\right)$$

$$+ F_{c_i}$$

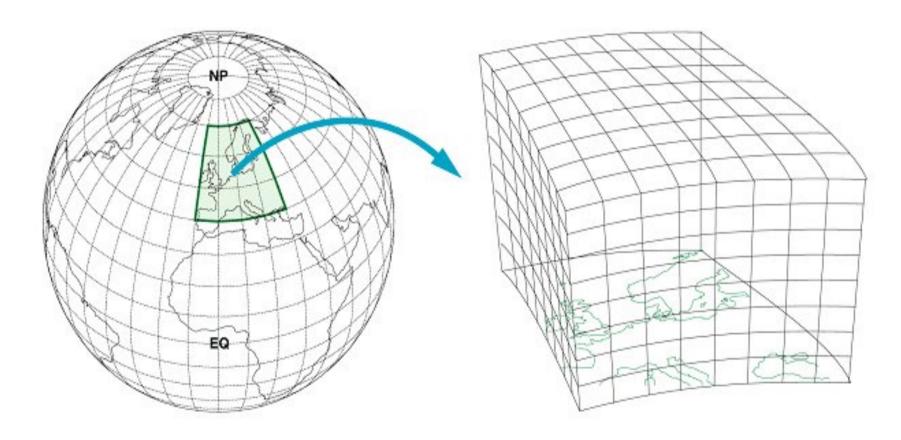
$$(i = 1, 2, 3, ...)$$

 $\xi$ : vorticity; K: kinetic energy;  $\eta$ : vertical coordinate;  $c_i$ : mixing ratio of tracer i: external forcing. Other symbols have their conventional meanings.

mit Papier und Bleistift nicht lösbar ...



... aber eine näherungsweise Lösung auf einem 3D-Gitter ist möglich.



Subgridskalige Prozesse müssen jedoch paramerisiert werden.



# Gleichungen für einen Wald ...?

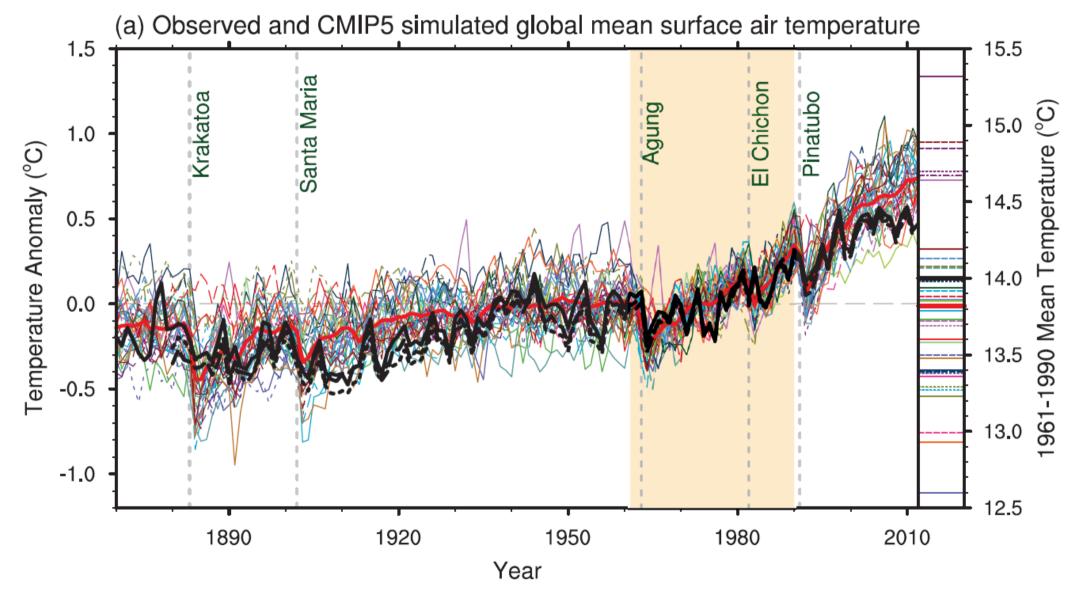






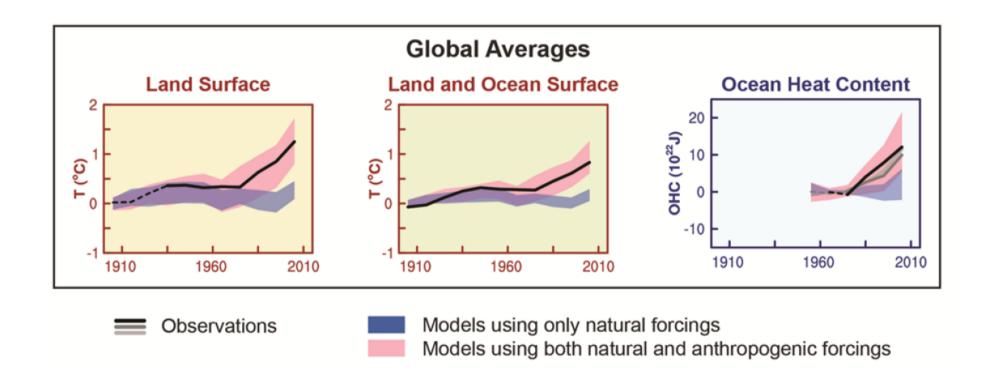
#### Globale Temperaturen – Beobachtet und simuliert





## Ist der Temperaturanstieg anthropogen?







## Klimasensitivität



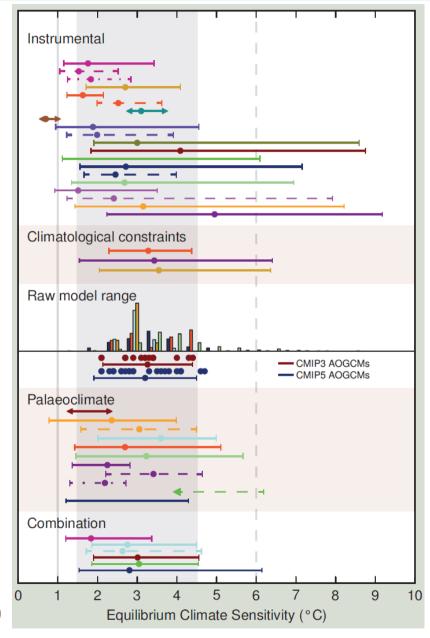
Klimasensitivität:

Temperaturanstieg  $\Delta T$ , der aus einem Strahlungsantrieb  $\Delta F$  an der Tropopause resultiert.

Űblicherweise wird er definiert als Temperaturanstieg bei einer Verdopplung der  $CO_2$  Konzentration (für die ein Strahlungsantrieb  $\Delta F \approx 3.7 \text{ W/m}^2$  angenommen wird).

Laut IPCC AR5 liegt die Gleichgewichtsklimasensitivität (ECS) wahrscheinlich zwischen 1.5 und 4.5 °C.

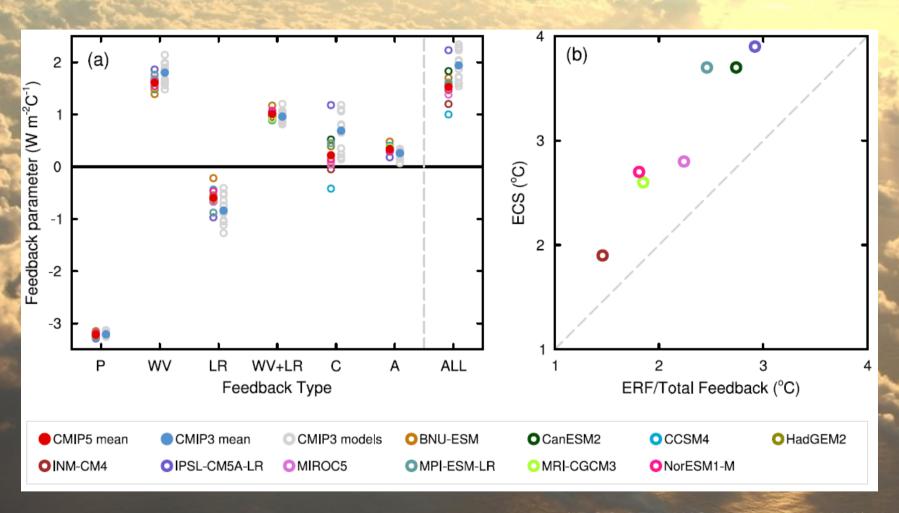
Die ECS ist nicht zu verwechseln mit der transienten Klimaantwort (TCR), der Temperaturänderung, die zum Zeitpunkt der CO<sub>2</sub>-Verdoppelung erreicht wird, wenn CO<sub>2</sub> um 1% jährlich ansteigt.





#### Warum ist Klimasensitivität in Modellen unterschiedlich?





(IPCC AR5, WG1, Fig.9.43, 2013)



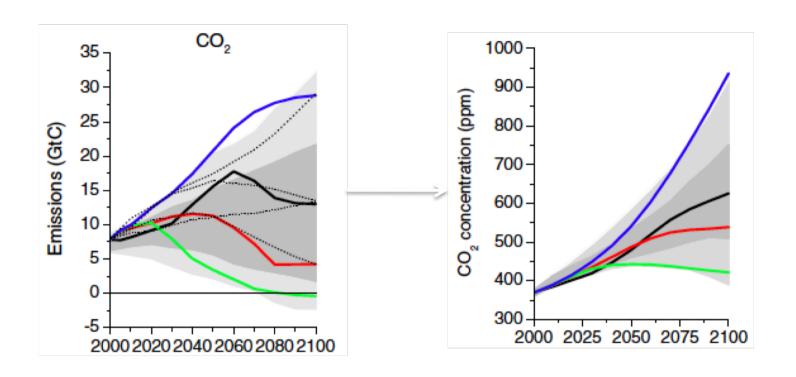


# Projektionen des zukünftigen Klimas



## RCPs: CO<sub>2</sub>-Emissionen und Konzentrationen





(van Vuuren et al., 2011)

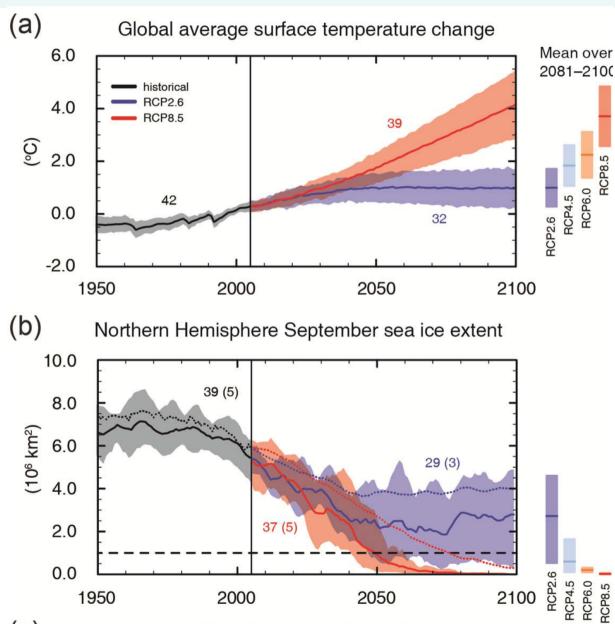
Green: RCP2.6 Red: RCP4.5 Black: RCP6.0 Blue: RCP8.5

RCP8.5 close to SRES A2, RCP4.5 close to SRES B1



## Projektionen: Globale Temperatur, Arktisches Meereis

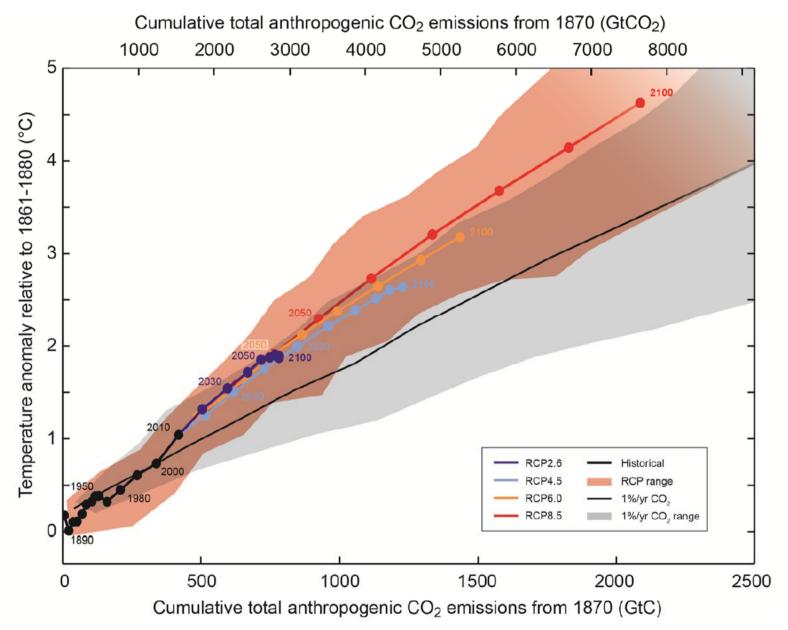






## Kumulative CO<sub>2</sub>-Emissionen und globale Temperatur







#### Wieviel dürfen wir noch emittieren?

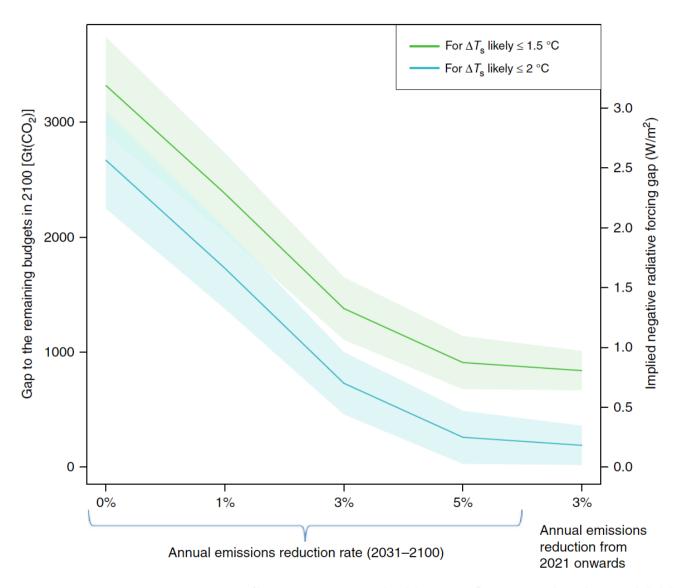


Verbleibendes Budget (ab 2015):

 $\Delta T$ <1.5°C: 650±130 Gt(CO<sub>2</sub>)  $\Delta T$ <2°C: 1300±130 Gt(CO<sub>2</sub>)

Current emission rate:

~40 Gt(CO<sub>2</sub>)/yr



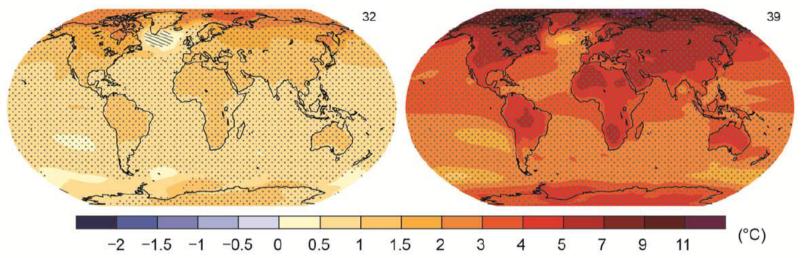
(Lawrence et al., Nature Communications, 2018)

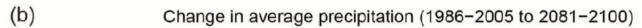


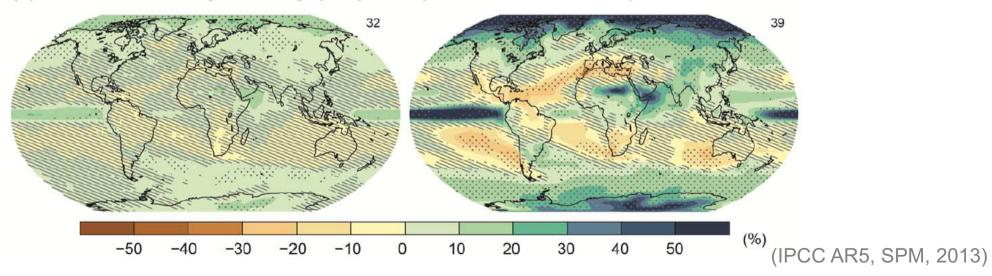
## Projektionen: Temperatur und Niederschlag







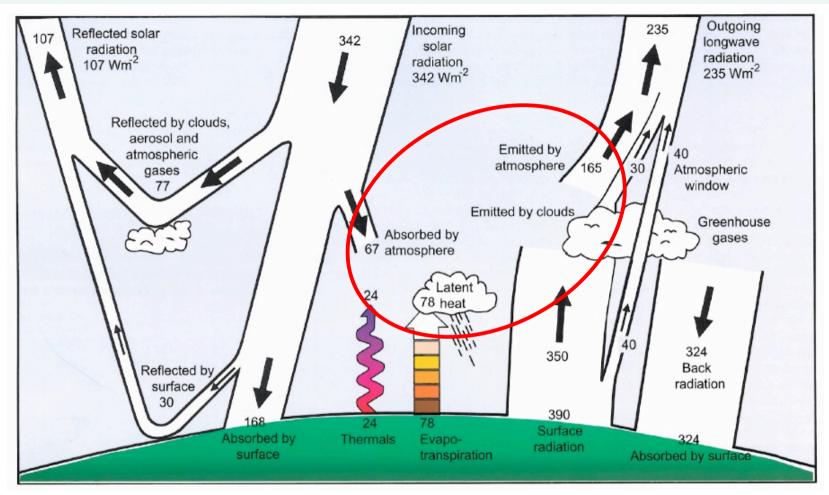






## Warum regnet es (und wieviel mehr bei Erwärmung)?





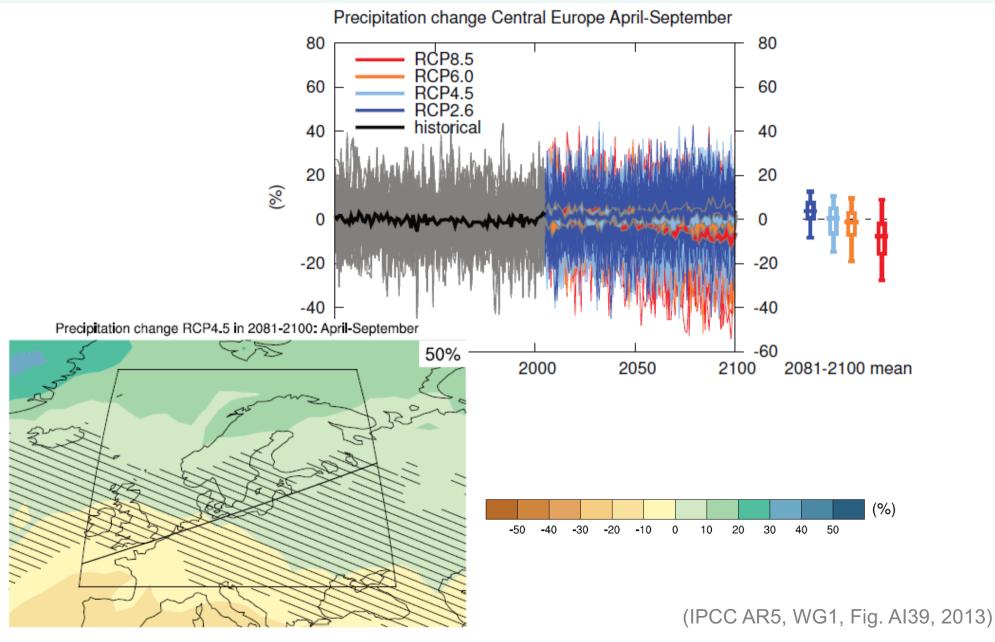
(Kiehl and Trenberth, 1997)

Die latente Wärme, die bei der Kondensation frei wird, gleicht die Strahlungskühlung der Troposphäre aus. Um 1°C wärmere Luft kann zwar um etwa 7% mehr Wasserdampf aufnehmen (Clausius-Clapeyron), Strahlungskühlung und damit Niederschlag nehmen jedoch durch mehr CO<sub>2</sub> und H<sub>2</sub>O, das diese Erwärmung verursacht, nur etwa um 2% zu.



## Niederschlagsänderungen in Zentraleuropa - Sommer

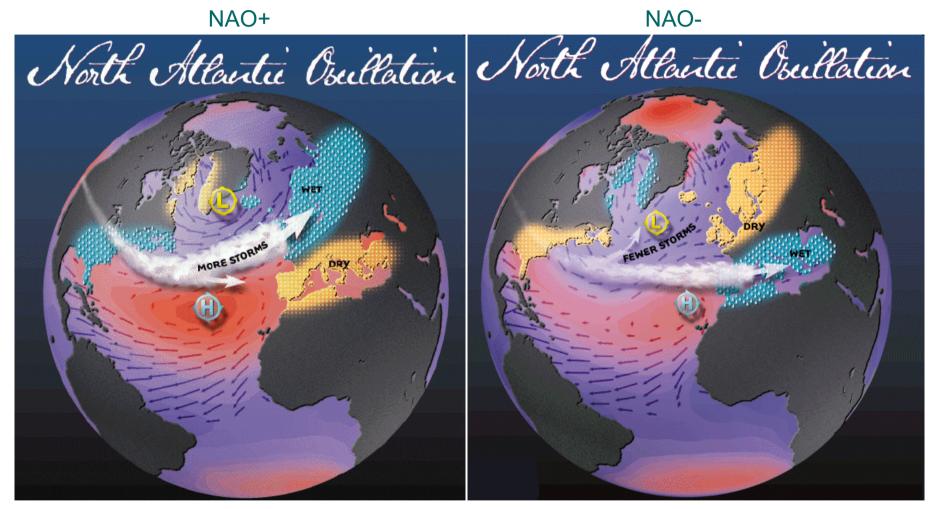






### NAO – Die Nordatlantische Oszillation





(http://www.ldeo.columbia.edu)

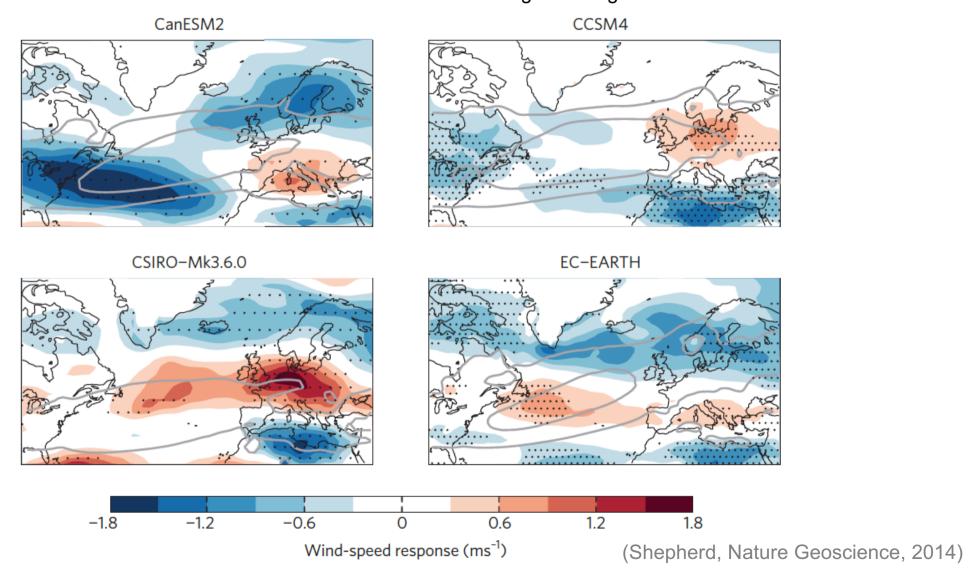
Zwischen etwa 1970 und 2010 wies der NAO-Index einen positiven Trend auf. Aufgrund des Klimawandels? Der Winter 2009/2010, z. B. war von einer extrem negativen NAO gekennzeichnet.



## Projektionen verschiedener Modelle



Mittlerer zonaler wind in 850 hPa im Winter (graue Isolinien, 5 m/s) und dessen Änderung im 21. Jahrhundert bei starkem Treibhausgasanstieg



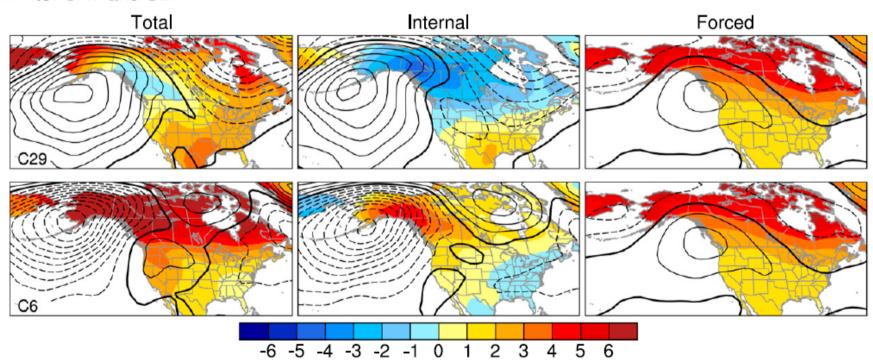


## Vorhersagbarkeit und interne Variabilität



## 50-year trends (2010-2060) simulated with the CCSM3 model

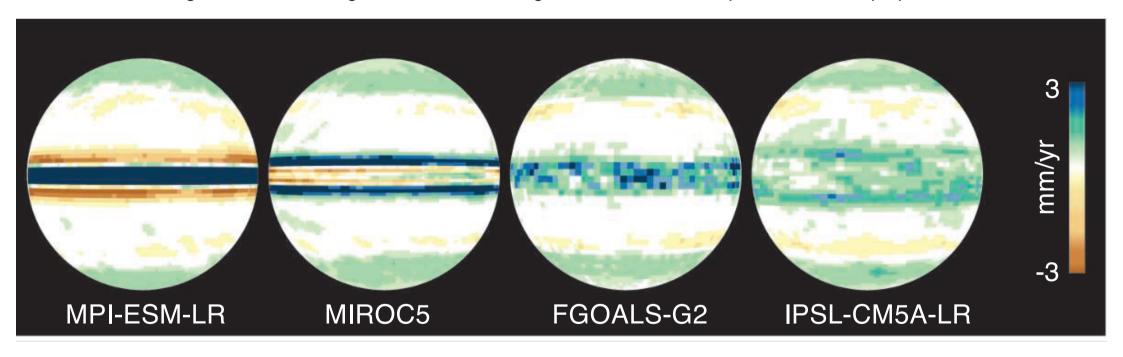
#### a) Winter SAT and SLP





## Projektionen verschiedener Modelle

Änderung des Niederschlags bei einer Erhöhung der Oberflächentemperatur eines Aquaplaneten um 4K



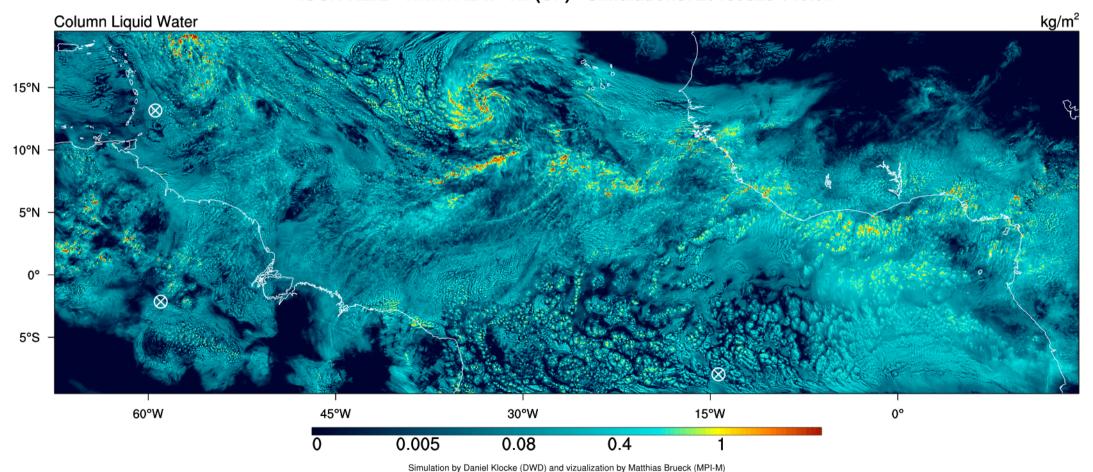


## (Eine) Zukunft der Modellierung



## Tropical Atlantic in ICON, August, 23, 2016

ICON HErZ - NARVAL-II - HD(CP)<sup>2</sup> Simulations: 20160823 +10.0h





### Werden Extremereignisse mit dem Temperaturanstieg zunehmen?



Hitzewellen: sehr wahrscheinlich, global

• Starkniederschläge: sehr wahrscheinlich, Landgebiete in mittleren Breiten

und Tropen

Hochwasser (Ozeane): sehr wahrscheinlich

Dürreperioden: wahrscheinlich, subtropische Regionen

Tropische Wirbelstürme: unsicher

Extratropische Stürme: unsicher

(IPCC AR5, Tab. SPM.1, 2013)





#### Was wissen wir und was nicht?



- Es ist "extrem wahrscheinlich", dass der menschliche Einfluss mehr als die Hälfte des seit 1951 beobachteten Temperaturanstiegs verursacht hat. (IPCC AR5)
- Eine Verdoppelung der CO<sub>2</sub>-Konzentration führt wahrscheinlich zu einem Temperaturanstieg zwischen 1.5 und 4.5 °C. (IPCC AR5)
- Der Temperaturanstieg bis zum Ende des 21. Jahrhunderts hängt hauptsächlich von den kumulativen anthropogenen Gesamtemissionen ab. Um die 2(bzw. 1,5)-°C-Grenze nicht zu überschreiten dürfen noch etwa 1200 (550) Gt CO<sub>2</sub> emittiert werden. Bisher wurden etwa 2000 Gt emittiert, aktuell etwa 40 Gt pro Jahr.
- Niederschläge haben wahrscheinlich in trockenen Regionen bereits abgenommen, in feuchten Regionen zugenommen. Dieser Trend wird sich sehr wahrscheinlich fortsetzen. Im globalen Mittel ist ein Anstieg von etwa 2% pro 1°C Erwärmung zu erwarten.
- Aktuell beträgt der globale Meeresspiegelanstieg etwa 3 mm pro Jahr. Ein Abschmelzen Grönlands würde etwa 7 m Anstieg verursachen, das der Antarktis etwa 40 m. Wie schnell dieses passieren kann ist unsicher.
- Diverse Wetterextreme werden wahrscheinlich zunehmen.
- Die globale Thermodynamik des Klimawandels ist recht gut verstanden, was Erwärmung für Zirkulation bedeutet viel weniger gut.
- Regionale Prognosen (z.B. f
  ür die Tropen oder Mitteleuropa) sind deutlich unsicherer als f
  ür globale Mittel.





## Towards convection resolving resolutions







# **Climate Engineering**

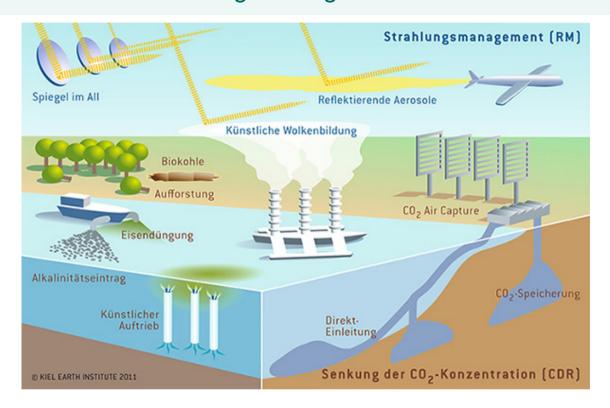
\_\_

eine Antwort auf den Klimawandel?



### Climate Engineering - Definition





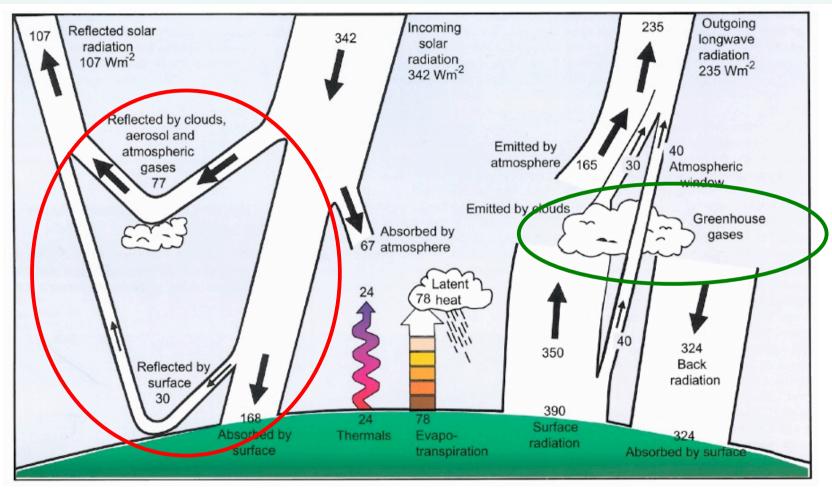
"Unter dem Begriff Climate Engineering (oder Geoengineering) werden technologische Maßnahmen zusammengefasst, die gezielt dazu eingesetzt werden könnten, die atmosphärische CO2-Konzentration zu senken oder die Strahlungsbilanz der Erde direkt zu beeinflussen, um so den anthropogen verursachten Klimawandel abzuschwächen bzw. zu kompensieren."

(http://www.spp-climate-engineering.de)



## Climate Engineering Optionen – 2 Kategorien



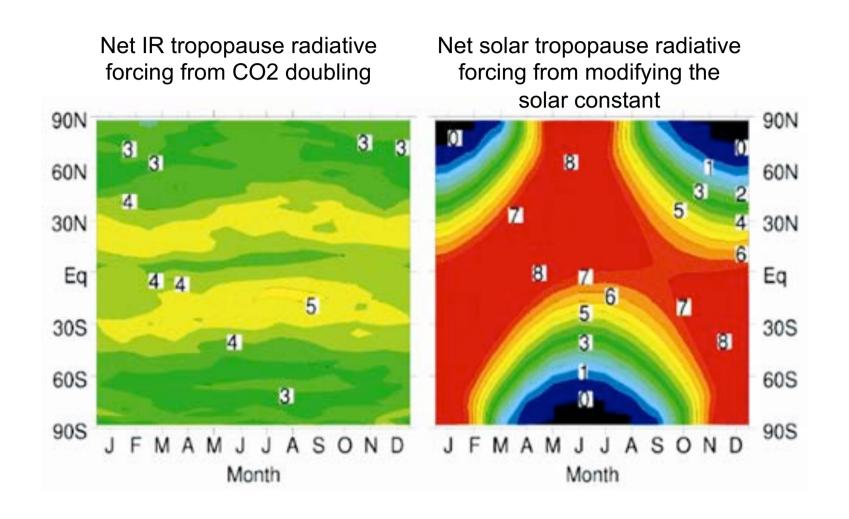


SRM: "Solar Radiation Management" – Beeinflusst den kurzwelligen (solaren) Teil der Energiebilanz

CDR: "Carbon Dioxide Removal" – Beeinflusst den infraroten (terrestrischen) Teil der Energiebilanz

## Inhomogener Strahlungsantrieb bei SRM

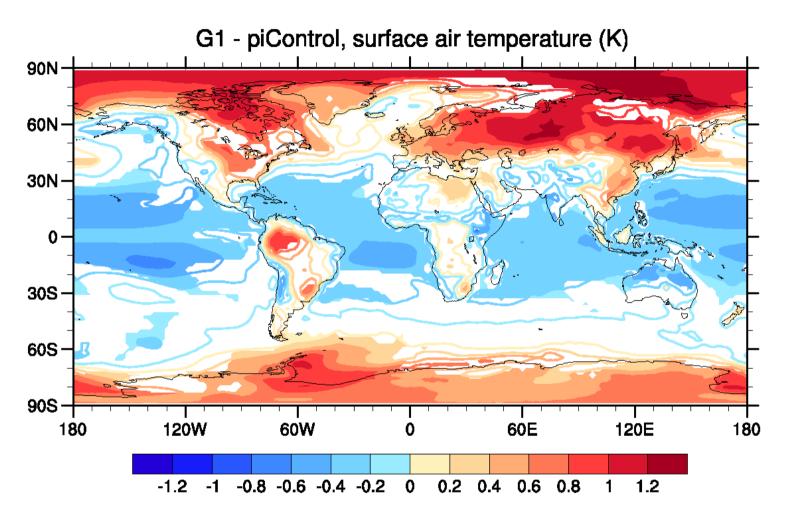






## T<sub>2m</sub> (K), G1-preindustrial, four ESMs





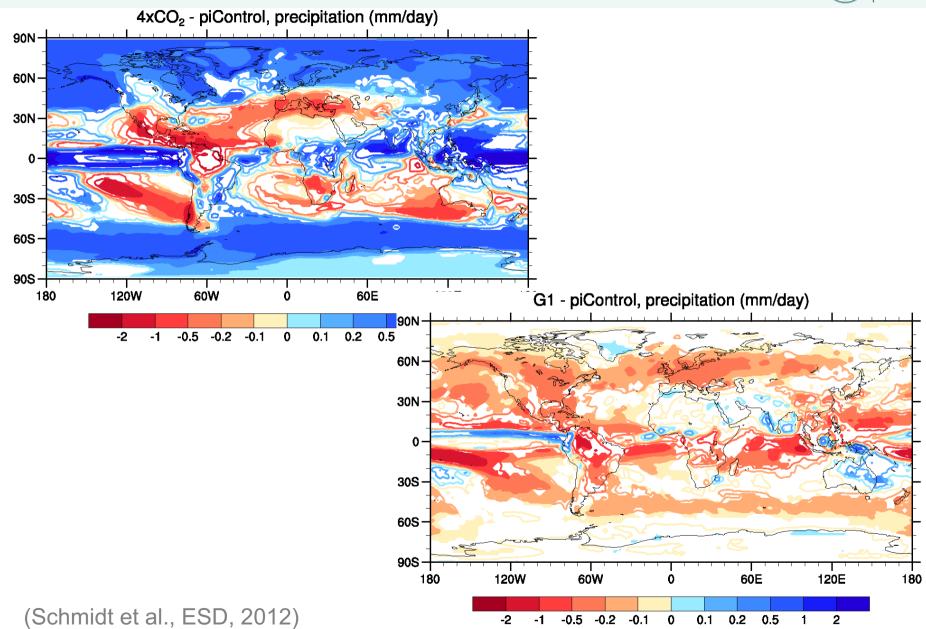
Color shading indicates regions where signals from all four models are of the same sign.

(Schmidt et al., ESD, 2012)



## Precip (mm/day), G1 vs. 4xCO<sub>2</sub>, four ESMs







## Zusammenfassung: Climate Engineering



- 2 Kategorien (SRM und CDR) mit sehr unterschiedlichen Ansätzen, Eigenschaften und potentiellen Folgen.
- Die Effektivität von CDR ist fraglich.
- SRM könnte die globale Erwärmung relativ kurzfristig stoppen.
- SRM würde kein historisches Klima reproduzieren, sondern ein bisher unbekanntes Klima erzeugen.
- Es gibt umfangreiche politische, ethische, juristische, ökonomische und natur-wissenschaftliche Bedenken.

#### Weiterlesen z.B. hier:

- "Gezielte Eingriffe", H. Schmidt und R. Wolfrum, in: "Die Zukunft des Klimas" (Hrsg: J. Marotzke und M. Stratmann), C.H. Beck, 2015
- "Gezielte Eingriffe in das Klima? Eine Bestandsaufnahme der Debatte zu Climate Engineering", BMBF Scoping Study, Kiel Earth Institute, http://www.kiel-earth-institute.de, 2011"
- "The European Transdisciplinary Assessment of Climate Engineering (EuTRACE)", Schäfer et al. (Hrsg.), http://www.eutrace.org/, 2015.
- "Climate Intervention Reports", National Academy of Sciences, https://nassites.org, 2015.

• ...







## Informieren

- www.ipcc.ch
- www.mpimet.mpg.de; www.deutsches-klima-konsortium.de; www.climate-service-center.de
- www.realclimate.org
- "Die Zukunft des Klimas", C.H. Beck Verlag
- ...
- Treibhausgasemissionen reduzieren
  - www.bmu.de
  - www.uba.de
  - www.dena.de
  - ...
- Auf den Klimawandel vorbereiten
- Das Klima manipulieren (Geoengineering)?



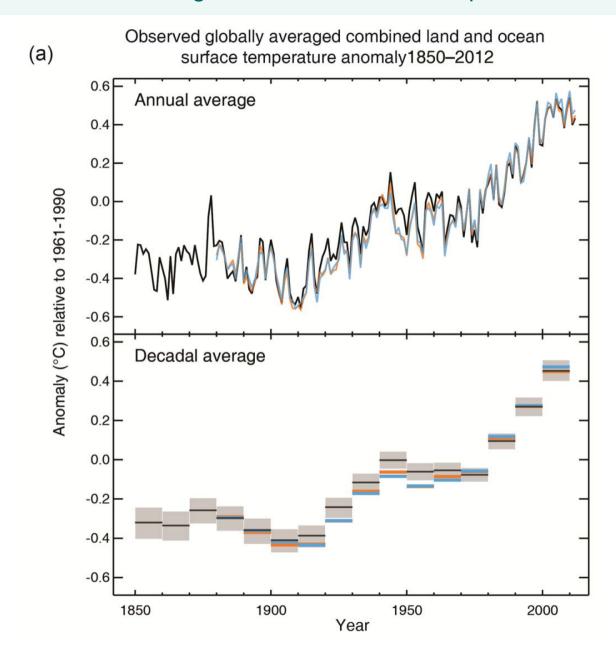


Spares



## Observed global mean surface temperature change





(IPCC AR5, SPM, 2013)





# **Climate Engineering**

\_\_

eine Antwort auf den Klimawandel?



## Responses to climate change



### Mitigation:

Reductions of greenhouse gas emissions and enhancement of sinks



### Adaptation:

Measures to reduce vulnerability of human and natural systems to climate change effects



### Climate engineering:

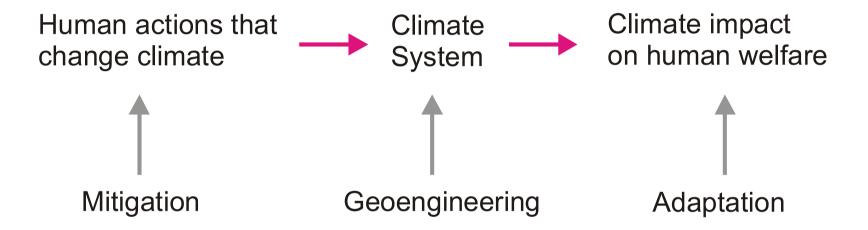
Intentional alteration of the climate system in order to reduce climate change





## Mitigation - Adaptation - Geoengineering

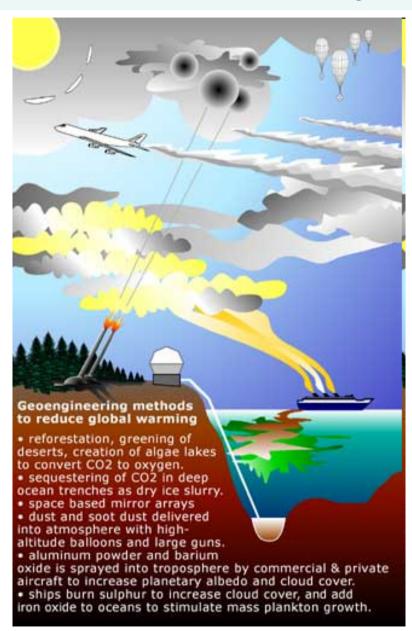






## Climate engineering - Definition





"The modern concept of geoengineering (or climate engineering) describes deliberately manipulating the Earth's climate to counteract the effects of global warming from greenhouse gas emissions."

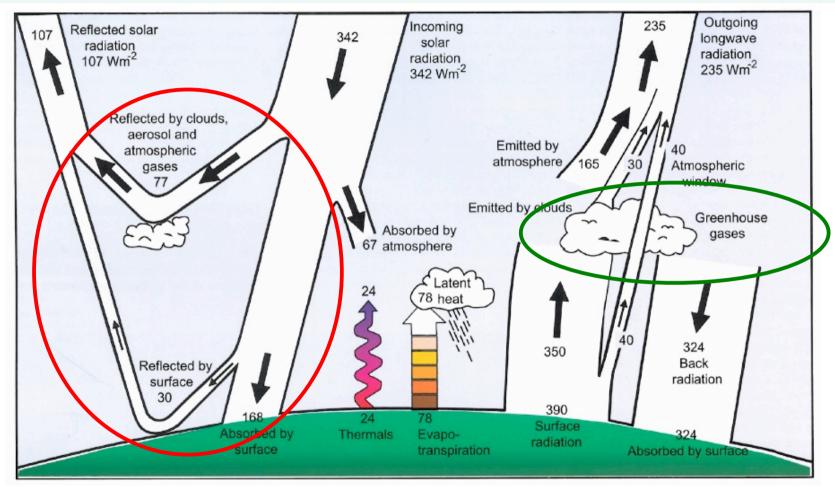
(Wikipedia)

(Image credit: B. Conway, Lightwatcher Publishing)



## Climate engineering options – 2 classes





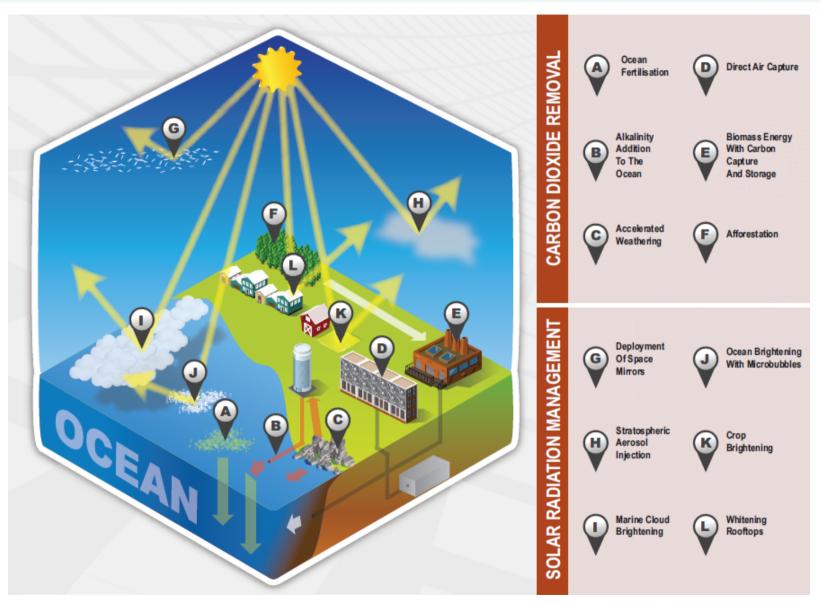
SRM: solar radiation management – acts on the short wave (solar) contribution to the energy balance

CDR: carbon dioxide removal – acts on the infrared (terrestrial) contribution to the energy balance



## Climate engineering in IPCC AR5 – method overview





(IPCC AR5, WG1, ch. 7, FAQ 7.3, Fig. 1, 2013)



# RESTORING THE QUALITY

OF

#### OUR ENVIRONMENT



#### OTHER POSSIBLE EFFECTS OF AN INCREASE IN ATMOSPHERIC CARBON DIOXIDE

Max-Planck-Institut eteorologie

Melting of the Antarctic ice cap.—It has sometimes been suggested that atmospheric warming due to an increase in the CO<sub>2</sub> content of the atmosphere may result in a catastrophically rapid melting of the Antarctic ice cap, with an accompanying rise in sea level. From our knowledge of events at the end of the Wisconsin period, 10 to 11 thousand years ago, we know that melting of continental ice caps can occur very rapidly on a geologic time scale. But such melting must occur relatively slowly on a human scale.

The Antarctic ice cap covers 14 million square kilometers and is about 3 kilometers thick. It contains roughly 4 x 10<sup>16</sup> tons of ice, hence 4 x 10<sup>24</sup> gram calories of heat energy would be required to melt it. At the present time, the poleward heat flow across 70° latitude is 10<sup>22</sup> gram calories per year, and this heat is being radiated to space over Antarctica without much measurable effect on the ice cap. Suppose that the pole-

The climatic changes that may be produced by the increased CO<sub>2</sub> content could be deleterious from the point of view of human beings. The possibilities of deliberately bringing about countervailing climatic changes therefore need to be thoroughly explored. A change in the radiation balance in the opposite direction to that which might result from the increase of atmospheric CO<sub>2</sub> could be produced by raising the albedo, or reflectivity, of the earth. Such a change in albedo could be

This is a hundred times greater than present worldwide rates of sea level change.

Warming of sea water.—If the average air temperature rises, the

Warming of sea water.—If the average air temperature rises, the temperature of the surface ocean waters in temperate and tropical regions could be expected to rise by an equal amount. (Water temperatures in the polar regions are roughly stabilized by the melting and freezing of ice.) An oceanic warming of 1° to 2°C (about 2°F) oc-

THE WHITE HOUSE

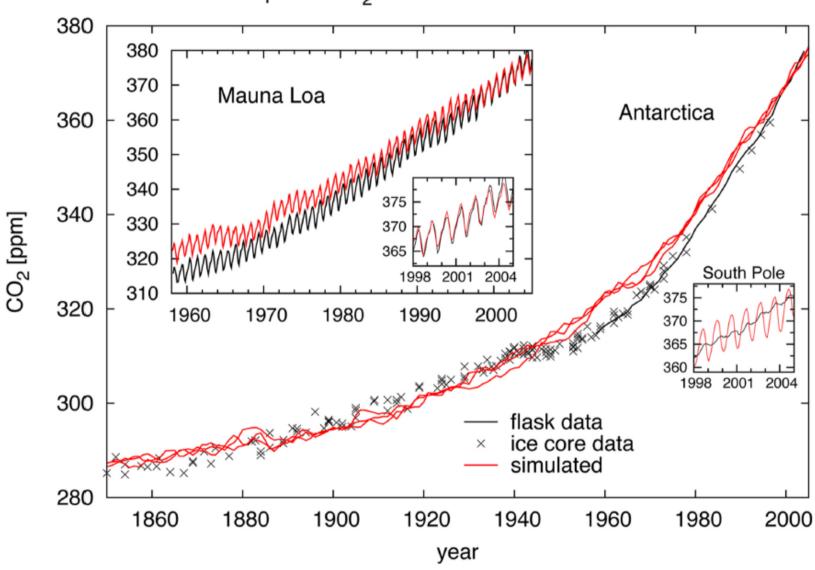
(courtesy from D. Keith, U. Calgary)



## Observed and simulated near surface air temperature



#### Atmospheric CO<sub>2</sub> – observed and from esmHistorical

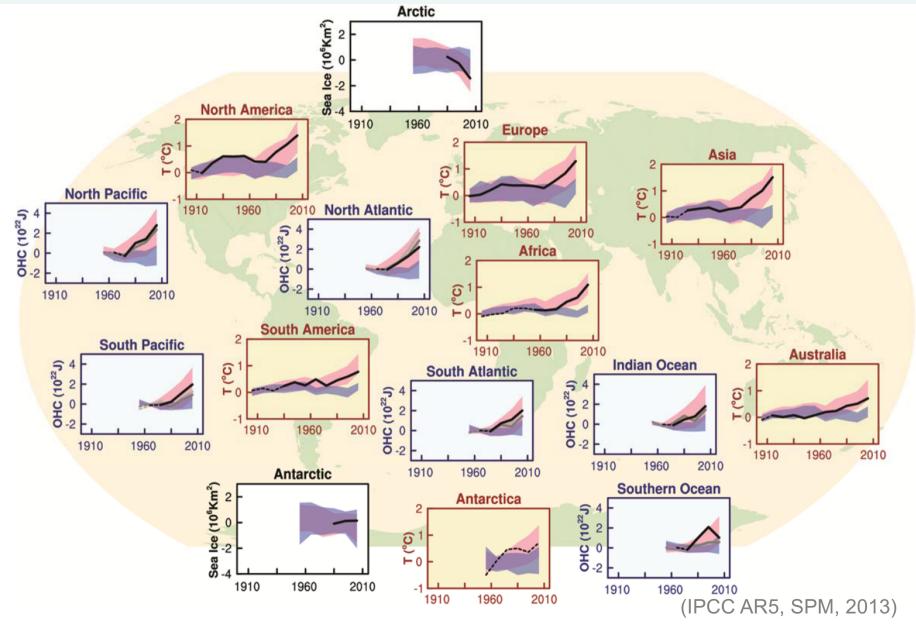


(Giorgetta et al., JAMES, 2013)



## Attribution of observed change

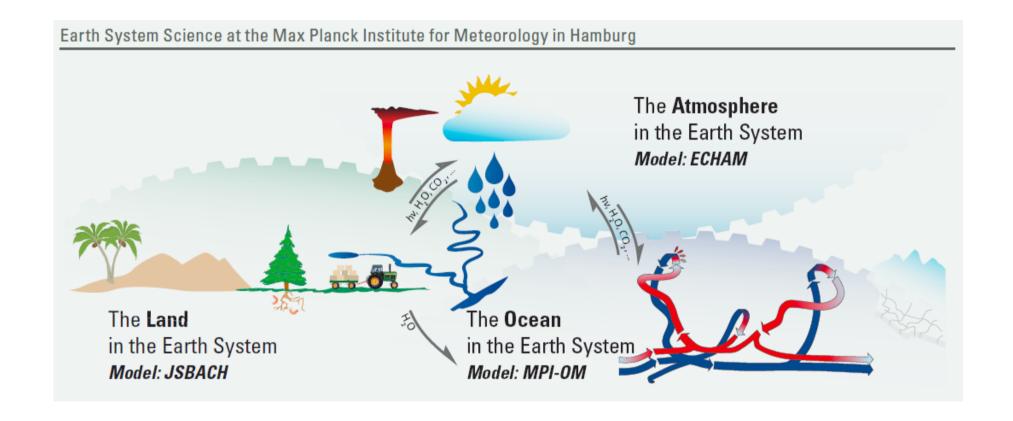






## Das Erdsystem – erforscht am MPI-M

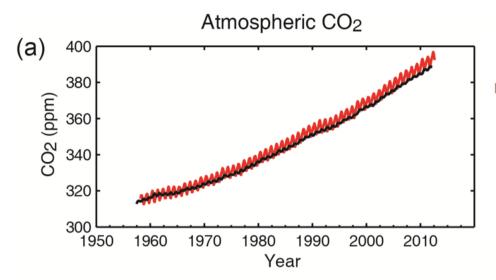






## CO<sub>2</sub> in Atmosphäre und Ozeanen





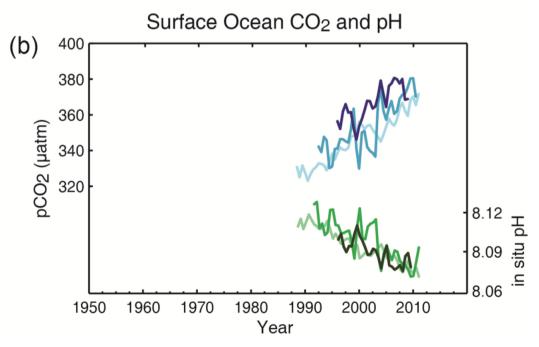
# Daily CO<sub>2</sub>

Mauna Loa Observatory | Atmospheric CO<sub>2</sub> Concentrations



daily mean concentrations | ppm = parts per million

(www.co2.earth)



(IPCC AR5, SPM, 2013)

# Gleichungen für Luft (oder Wasser)



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(f+\xi)\mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla K - \dot{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} - \frac{R_d T}{p} \nabla p - \nabla \phi \\ + \mathbf{F_v}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T - \dot{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{R_d T}{C_p} \frac{\partial p}{p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ 0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{R_d T}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ - \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\ + F_\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( c_i \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = -\nabla \cdot \left( \mathbf{v} c_i \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \dot{\eta} c_i \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\ + F_{c_i}$$

$$| \mathbf{v} | \mathbf{v$$