Kosmischer Ursprung und Zeitentwicklung der für irdische Zwecke nutzbaren Energie

Eckhard Rebhan, Heinrich-Heine-Universität,
Institut für Theoretische Physik II, Universitätsstr. 1, D 40225 Düsseldorf

6. Mai 2005

Zusammenfassung Die Expansion des Universums wird durch drei Sorten Energie bestimmt: 1. Energie von Strahlung und Materie (inklusive dunkler Materie), 2. die für das Abbremsen der kosmischen Expansion verantwortliche Gravitationsenergie und 3. sogenannte dunkle Energie. Die von der Menschheit genutzten Energiequellen sind alle auf die unter 1. aufgeführten Energien zurückzuführen. Bei der Gravitationsenergie handelt es sich um negative Feldenergie. Sie und die dunkle Energie sind nicht für irdische Zwecke nutzbar. Nur in der – bis heute andauernden – materiedominierten Ära der kosmologischen Evolution bleibt die im heute sichtbaren Universum enthaltene Gesamtenergie der Materie für sich erhalten. In den frühen Phasen des Universums dagegen gilt Energieerhaltung nur für die Summe der drei angeführten Gesamtenergien, und nach den Einsteinschen Feldgleichungen bzw. deren Spezialisierung auf unser Universum (Friedmann-Lemaitre-Gleichung) ist diese Summe gleich null. Bei reinen Urknall-Modellen des Universums ohne dunkle Energie wird die Gesamtenergie von Strahlung und Materie in der strahlungsdominierten Frühphase des Universums umso größer, je weiter man in der Zeit zurückgeht, um schließlich im Urknall zu divergieren. Gleichzeitig geht die Gravitationsenergie wegen des Verschwindens der Summe der Gesamtenergien gegen minus unendlich.

In der modernen Kosmologie werden Urknallsingularitäten und damit auch die angeführten Gesamtenergie-Singularitäten dadurch vermieden, daß einem Beinahe-Urknall (Zustand wie der einer Urknall-Lösung kurz nach dem Urknall) eine Phase explosiver Expansion, eine sogenannte Inflation, vorausgeht. Diese wurde durch dunkle Energie sehr hoher, aber endlicher Konzentration angetrieben. Zu Beginn der Inflation war die Gesamtmenge an dunkler Energie wegen der mikroskopischen Kleinheit des Universums verschwindend klein, nahm jedoch aufgrund der schnellen Expansion trotz abnehmender Konzentration sehr schnell zu. Wegen der Erhaltung der Summe aller Gesamtenergien mußte das durch eine gleich schnelle Zunahme des Betrags der Gravitationsenergie kompensiert werden. Die Phase der Inflation wurde dadurch beendet, daß die dunkle Energie in einer Art Phasenübergang durch Zerfall in Energie von Strahlung und Materie überführt wurde. Die riesige Menge der heute in Strahlung und Materie des Universums enthaltenen und für irdische Zwecke nutzbaren Energie stammt also letztlich aus dunkler Energie. Da deren Gesamtmenge anfänglich verschwindend klein war, kann man sagen, daß die für uns nutzbare Energie buchstäblich aus dem Nichts kam.

1 Einleitung

Für die mathematische Beschreibung der dynamischen Entwicklung des Universums und der in diesem enthaltenen Energien werden die Friedmann-Lemaitre-Gleichungen benötigt, die für ein räumlich flaches Universum

$$\dot{a}^2(t) = \frac{1}{3M_{Pl}^2}(\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d)\, a^2 \tag{1}$$

und

$$\ddot{a}(t) = -\frac{1}{6M_{Pl}^2}\left[\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d + 3(p_m + p_s + p_d)\right] a \tag{2}$$

lauten. In ihnen ist t die kosmische Zeit, $a(t)$ der Skalenfaktor des Universums, $\dot{a}(t)$ und $\ddot{a}(t)$ bezeichnen die erste und zweite Zeitableitung, $M_{Pl}{\approx}0,02$ mg ist die Planck-Masse, ϱ_s, ϱ_m sowie ϱ_d sind die Massendichten von Strahlung, Materie sowie dunkler Energie und p_s, p_m sowie p_d die entsprechenden Drücke. Wird die Lichtgeschwindigkeit wie in den Gleichungen (1)–(2) gleich eins gesetzt, so stimmen Massen- und Energiedichte überein. Der heute allgemein favorisierte Fall eines räumlich flachen Universums wurde gewählt, um die durch das sogenannte Flachheitsproblem (siehe z.B. [1]) bedingte extreme Feinabstimmung der Anfangsbedingungen zu vermeiden.
Gemäß den Gleichungen (1)–(2) wird die Expansion des Universums von drei Sorten Energie bestimmt: 1. Energie von Strahlung und Materie (unter Einschluß von dunkler Materie) mit den Dichten ϱ_s bzw. ϱ_m, 2. dunkle Energie der Dichte ϱ_d und 3. die für die Abbremsung der Expansion des Universums verantwortliche Gravitationsenergie (siehe Gleichung (17)). Die von der Menschheit genutzten Energiequellen gehen auf die Energie der Materie zurück, und hier wiederum im wesentlichen auf den kleinen Bruchteil der leuchtenden Materie.
Der heutige metrische Radius des heute sichtbaren Universums, der sogenannte Teilchenhorizont, ist

$$d_0 = \alpha_0 t_0\,, \tag{3}$$

wobei nach dem für die hiesigen Rechnungen benutzten Modell des Universums $t_0{=}14{\cdot}10^9$ a das gegenwärtige Alter des Universums ist und α_0 den Wert 4 besitzt (siehe Ende von Abschn. 3). Dementsprechend ist das Volumen des gegenwärtig sichtbaren Universums unter der Annahme räumlicher Flachheit

$$V_0 = V(t_0) = \frac{4\pi}{3} d_0^3 = \frac{4\pi}{3}\alpha_0^3\, t_0^3\,. \tag{4}$$

(Im folgenden werden alle zeitabhängigen Funktionen bei der Auswertung zum Zeitpunkt t_i mit f_i bezeichnet.) Messungen zufolge ist die gegenwärtige mittlere Dichte der leuchtenden Materie

$$\varrho_{lm0} = h^2{\cdot}4{\cdot}10^{-28}\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \qquad \text{mit} \qquad 0,5 \le h \le 1\,. \tag{5}$$

Die Masse und die Energie der in V_0 enthaltenen leuchtenden Materie sind

$$M_{lm0} = E_{lm0} = \varrho_{lm0} V_0\,. \tag{6}$$

Für den in dieser Arbeit gewählten repräsentativen Wert $h{=}0,75$ haben sie in SMI-Einheiten die Werte $14,2{\cdot}10^{52}$ kg bzw. $1,3{\cdot}10^{52}$ EJ. (Die Energie ist etwa das $0,3{\cdot}10^{50}$-fache des jährlichen Energieverbrauchs der Menschheit.)

In der materiedominierten Ära, die den größten Teil der bisherigen Dauer des Universums ausmacht, kann die Materie nicht-relativistisch behandelt werden und genügt der aus (1)–(2) mit p_m=0 folgenden Gleichung

$$\varrho_m a^3(t) = \varrho_{m0} a_0^3 \,. \tag{7}$$

Da das Volumen $V(t)$ des heute sichtbaren Universums zu früheren Zeiten t durch

$$V(t) = x^3(t)\, V_0 \tag{8}$$

mit

$$x(t) = \frac{a(t)}{a_0} \tag{9}$$

gegeben war, genügt die in dem expandierenden Volumen $V(t)$ enthaltene Energie der leuchtenden Materie nach(6)–(9) der Gleichung

$$E_{lm}(t) = \varrho_{lm}(t)\, V(t) = \varrho_{lm}(t)\, \frac{a^3(t)}{a_0^3}\, V_0 = \varrho_{lm0} V_0 = E_{lm0} \,.$$

Dies bedeutet, daß sie in der nicht-relativistischen Ära eine Erhaltungsgröße ist.
In den Zeiten davor, als die Materie noch so heiß war, daß sie relativistisch behandelt werden muß, erfüllte sie statt Gleichung (7) wie Strahlung die Zustandsgleichung p_i=$\varrho_i/3$ bzw.

$$\varrho_i(t)\, a^4(t) = \text{const} = \varrho_{i1} a_1^4 \qquad \text{für} \qquad i = m, s \,, \tag{10}$$

wobei t_1 der späteste Zeitpunkt ist, zu dem Materie noch relativistisch behandelt werden muß. (In dieser Arbeit wird das relativ kurze Zeitintervall, in dem sich der Übergang von relativistischem zu nicht-relativistischem Verhalten vollzieht, der Einfachheit halber auf null zusammengeschrumpft. Dies bedeutet, daß für $t \leq t_1$ die Gültigkeit von Gleichung (10) und für $t > t_1$ die Gültigkeit von Gleichung (7) angenommen wird.) Aus (8)–(10) erhalten wir

$$E_{lm}(t) = \varrho_{lm}(t)\, V(t) = \frac{\varrho_{lm1}\, a_1^4\, V_0}{a(t)\, a_0^3} = \frac{\varrho_{lm1}\, x_1^4\, V_0}{x(t)} \,, \tag{11}$$

und aus (1) ergibt sich mit (9) und $\varrho_d \ll \varrho = \varrho_m + \varrho_s$ (siehe kurz vor Gleichung (23)) Gleichung (23) bzw. (mit (9)–(10)) die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{\varrho_1}{3}}\, \frac{x_1^2}{M_{Pl}\, x(t)} \,,$$

die durch

$$x(t) = x_1 \left(\frac{\varrho_1}{3}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2t}{M_{Pl}}} \tag{12}$$

gelöst wird. Wird diese Lösung in Gleichung (11) eingesetzt, so folgt

$$E_{lm}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \,. \tag{13}$$

Dies bedeutet, daß die Energie der leuchtenden Materie für t=0, den Zeitpunkt des Urknalls, divergiert. In reinen Urknall-Modellen des Universums haben also nicht nur die Massen- und Energiedichten beim Urknall eine Singularität, sondern auch die Gesamtenergien, und das, obwohl das Volumen des sichtbaren Universums nach (8) und (12) für t=0 verschwindet.

Dieses Ergebnis bedeutet keine Verletzung der Energieerhaltung. Die Friedmann-Lemaitre Gleichungen (1)–(2) folgen aus den Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\frac{1}{M_{Pl}^2} \left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(d)} \right] , \tag{14}$$

die um einen Energie-Impuls-Tensor für ein räumlich homogenes Skalarfeld $\Phi{=}\Phi(t)$ erweitert sind, das die dunkle Energie beschreiben soll (siehe z.B. [2]). $R_{\mu\nu}$ ist der Ricci-Tensor, R der Krümmungsskalar, $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor für Strahlung und Materie und

$$T_{\mu\nu}^{(d)} = (\partial_\mu \Phi)(\partial_\nu \Phi) - \mathcal{L}\, g_{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{L} = g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi)(\partial_\beta \Phi) - V(\Phi) \tag{15}$$

der Energie-Impuls-Tensor für die dunkle Energie. Der metrische Tensor ist so gewählt, daß in einem lokal orthonormalen Inertialsystem $g_{00}{=}1$ und $g_{11}{=}g_{22}{=}g_{33}{=}{-}1$ gilt, $V(\Phi)$ ist eine Funktion von Φ, die frei wählbar ist, wenn auf die Renormierbarkeit der zugehörigen Quantenfeldtheorie verzichtet wird. Aus Gleichung (15) ergeben sich als Massen- bzw. Energiedichte und als Druck der dunklen Energie

$$\varrho_d = T_{00}^{(d)} = \dot{\Phi}^2 - \mathcal{L} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \qquad p_d = \mathcal{L} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi)\,. \tag{16}$$

Nach Gleichung (20), die später aus (1)–(2) und (16) für den Fall $\varrho_s{=}\varrho_m{=}0$ abgeleitet wird, ist die "Geschwindigkeit" $\dot{\Phi}$ aufgrund des "Reibungsterms" $3H\dot{\Phi}$ im allgemeinen so klein, daß $\varrho_d \approx V(\Phi) \geq 0$ und $p_d \approx -V(\Phi) \leq 0$ gilt. Wegen $\Phi{=}\Phi(t)$ ist die physikalische Wirkung des Skalarfeldes Φ im wesentlichen die gleiche wie die einer dynamischen kosmologischen Konstanten $\Lambda(t){=}V(\Phi(t))$, die in Gleichung (16) durch einen Tensor $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\Lambda(t)\, g_{\mu\nu}$ anstelle von $T_{\mu\nu}^{(d)}$ repräsentiert würde.
Gleichung (1), die wir in der Form

$$\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d + \varrho_g = 0 \qquad \text{mit} \qquad \varrho_g = -\frac{3 M_{Pl}^2\, \dot{a}^2(t)}{a^2} \tag{17}$$

schreiben können, ist die 0-0-Komponente der Feldgleichungen (14). Dimensionsmäßig und ihrer Definition entsprechend sind ϱ_m, ϱ_s und ϱ_d Massen- und Energiedichten, und dementsprechend hat auch ϱ_g die Dimension einer Massen- und Energiedichte. Bei der Ableitung von (1)–(2) aus Gleichung (14) ergibt sich, daß der Term ϱ_g von deren linker Seite stammt. Diese beschreibt die Krümmung der Raum-Zeit, die ihrerseits in der Allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld darstellt. ϱ_g kann daher als Massen- bzw. Energiedichte des kosmischen Gravitationsfeldes aufgefaßt werden. Da ϱ_m, ϱ_s und ϱ_d positiv sind, muß ϱ_g nach Gleichung (17) negativ sein. (Im Anhang wird anhand des Grenzfalls vektorieller Newtonscher Gravitationsfelder dargelegt, warum die Gravitationsenergie negativ sein muß.) Wird Gleichung (17) mit dem Volumen $V(t)$ multipliziert, welches das gegenwärtig sichtbare Universums zur Zeit t einnahm, so erhalten wir

$$E_m(t) + E_s(t) + E_d(t) + E_g(t) = 0\,. \tag{18}$$

Darin ist $E_i{=}\varrho_i V(t)$ die in $V(t)$ enthaltene Gesamtenergie der Materie für $i{=}m$, Strahlung für $i{=}s$, dunklen Energie für $i{=}d$ und kosmischen Gravitation für $i{=}g$. Gleichung (18) bedeutet, daß die für die Expansion des Universums verantwortlichen Gesamtenergien im

allgemeinen nicht separat erhalten werden, sondern nur in ihrer Summe. Damit diese verschwindet, muß daher zusammen mit E_m und E_s auch E_g beim Urknall eine Singularität aufweisen.
Urknall-Singularitäten sind als sehr spezielle und nicht weiter erklärbare Anfangsbedingungen von Urknall-Modellen des Universums aufzufassen und haben die Physiker nicht gerade begeistert. Das Konzept einer kosmischen Inflation, die einem Beinahe-Urknall (Zustand einer Urknall-Lösung kurz nach dem Urknall) vorangeht, hat nicht nur zur Lösung von Problemen wie dem der verblüffenden Homogenität kausal unverbundener Teilregionen des Universums und dem der Galaxienentstehung beigetragen, sondern auch die Singularitäten der Urknall-Modelle beseitigt. Der Zweck dieser Arbeit ist es, zu zeigen, wie sich die verschiedenen Gesamtenergien der Gleichung (18) zeitlich entwickelt haben nach einem Modell, das durch das Einbeziehen einer vorangehenden Inflation die Urknallsingularitäten vermeidet.

2 Benutztes kosmologisches Modell

Ohne den Rückgriff auf topologische Raffinessen ist ein räumlich flaches Universum unendlich ausgedehnt, während ein expandierendes Universum, das zugleich flach und kausal verbunden ist, endlich sein muß. Das einfachste Modell für die Geometrie eines räumlich flaches Universum endlicher Ausdehnung erhält man daher, wenn man dieses als endlichen Ausschnitt eines unendlich ausgedehnten, räumlich flachen Universums auffaßt. Ein attraktives Modell, das die Eigenschaften Flachheit, Expansion und kausale Verbundenheit miteinander kombiniert, liefert das Konzept der 1983 von A. Linde eingeführten chaotischen Inflation [3]-[4]. Nach diesem hat sich unser Universum im Teilgebiet eines Super-Universums entwickelt, in dem an allen Orten und zu allen Zeiten Fluktuationen eines Feldes Φ von der Art eines Higgs-Feldes auftreten. Dieses wird als Inflaton bezeichnet und kann zu einer inflationären Aufblähung des Gebiets führen, in dem die Fluktuation lokalisiert ist, sofern diese gewisse Kriterien erfüllt. (Wenn sie das nicht tut, zerfällt sie innerhalb kürzester Zeit, was auf die meisten Fälle zutrifft. In einem unendlich ausgedehnten Super-Universum gibt es jedoch immer noch genügend viele günstige Fluktuation, aus denen sich ein Universum wie unseres entwickelt oder ein diesem ähnliches.) Wir nehmen dementsprechend an, daß sich unser Universum aus einer Fluktuation in einem winzigen Teilgebiet eines Super-Universums entwickelt hat. Innerhalb eines Raum-Zeit-Gebiets mit dem Durchmesser einer Planck-Länge führt die quantenmechanische Unschärferelation zu Energiefluktuationen der Größenordnung $\Delta E{\sim}M_{PL}$ und Energiedichtefluktuationen der Größenordnung $\Delta\varrho{\sim}M_{Pl}^4$. Wir nehmen daher als Anfangsbedingung für das Inflaton an, daß es innerhalb einer Kugel vom metrischen Radius einer Planck-Länge L_{Pl} gleichförmig ($\Phi{=}\Phi(t)$) mit der Dichte $\varrho{=}M_{Pl}^4$ verteilt war. Der Einfachheit halber gehen wir außerdem davon aus, daß anfänglich keine Strahlung und Materie vorhanden waren.
Mit Hilfe eines reellen Skalarfeldes, das die durch Gleichung (16) gegebenen Werte von Dichte und Druck besitzt, können wir eine inflationäre Expansion beschreiben. Indem wir $\varrho_s{=}\varrho_m{=}p_s{=}p_m{=}0$ setzen, Gleichung (1) nach t differenzieren und Gleichung (2) einsetzen, erhalten wir

$$\dot{\varrho}_d + 3H(\varrho_d + p_d) = 0\,. \tag{19}$$

Werden hierin die Gleichungen (16) eingesetzt, so ergibt sich nach Herauskürzen des Faktors $\dot{\Phi}$ für $\Phi(t)$ die Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0\,. \tag{20}$$

Man erhält eine inflationäre Lösung, wenn das Feld $\Phi(t)$ zur Zeit t=0 mit einem Wert startet, bei dem das Potential $V(\Phi)$ hoch ist, und von dort aus zu niedrigeren Werten "hinunterrollt". Üblicherweise wird angenommen, daß das solange vonstatten geht, bis ein Minimum von $V(\Phi)$ erreicht wird, um das $\Phi(t)$ nach Gleichung (20) gedämpfte Oszillationen ausführt. Bei diesem Schwingungsprozeß gibt das Feld $\Phi(t)$ durch eine in Gleichung (20) nicht enthaltene Kopplung den Großteil seiner Energie an Materie- und Strahlungsfelder ab, wobei parametrische Resonanz eine wesentliche Rolle spielt (siehe [5]). In dieser Arbeit wird dieser Prozeß als diskontinuierlicher Phasenübergang behandelt, bei dem die Dichte ϱ_d des Feldes Φ zur Zeit t_2>0 sprunghaft in Materie- und Strahlungsdichte überführt wird. Wir nehmen an, daß $\varrho_d(t)$ nach diesem Übergang den heutigen Wert ϱ_{d0} annimmt, d.h.

$$\varrho_d(t) = \varrho_{d0} \qquad \text{für} \qquad t_2 < t \leq t_0\,, \tag{21}$$

während die kombinierte Dichte ϱ=ϱ_m+ϱ_s von Strahlung und relativistischer Materie um den gleichen Betrag zunimmt, um den $\varrho_d(t)$ abnimmt, so daß wir

$$\lim_{\epsilon\to 0} \varrho(t_2+\epsilon) \approx \lim_{\epsilon\to 0} [\varrho(t_2+\epsilon)+\varrho_{d0}] = \lim_{\epsilon\to 0} \varrho_d(t_2-\epsilon) \tag{22}$$

haben. Die hier beim ersten Schritt eingeführte Näherung ist deshalb möglich, weil die heutige Dichte ϱ_{d0} um viele Größenordnungen kleiner als die nach dem Phasenübergang erreichte gemeinsame Dichte ϱ von Strahlung und Materie ist, und das bleibt auch so für eine ganze Weile nach dem Phasenübergang. Wir erhalten daher für die dynamische Entwicklung des Universums aus Gleichung (1) unter Benutzung der Definition (9) die Gleichung

$$\dot{x}^2(t) = \frac{1}{3M_{Pl}^2}\,\varrho\, x^2 \qquad \text{mit} \qquad \varrho = \varrho_m + \varrho_s\,. \tag{23}$$

In der auf den Phasenübergang folgenden Ära ist die Temperatur der Materie so hoch, daß diese sich relativistisch verhält. Strahlung und Materie können daher gleichartig behandelt werden, beide genügen der Zustandsgleichung (10), die mit der Definition (9) in die Form

$$\varrho(t)\, x^4(t) = \varrho_1 x_1^4 \tag{24}$$

gebracht werden kann.

Wenn durch die mit der Expansion des Universums verbundenen Abkühlung die Temperatur hinreichen niedrig geworden ist, müssen Strahlung und Materie separat behandelt werden. Während Strahlung bei allen Temperaturen der Gleichung (10) genügt, muß der Zustand nicht-relativistischer Materie durch Gleichung (7) beschrieben werden, unter Benutzung der Definition (9) haben wir also zwei Zustandsgleichungen

$$\varrho_m(t)\, x^3(t) = \varrho_{m0}\,, \qquad \varrho_s(t)\, x^4(t) = \varrho_{s0}\,, \tag{25}$$

die dann bis zum heutigen Zeitpunk t_0 gelten. Wie schon erwähnt treffen wir die vereinfachende Annahme, daß das relativ kurze Zeitintervall des Übergangs von relativistischem zu nicht-relativistischem Verhalten gleich null ist. Dieser Übergang vollzieht sich etwa um den Zeitpunkt herum, zu dem Strahlung und Materie die gleiche Dichte haben. Nach [6] ist die zugehörige Temperatur

$$T_1 = 65500\,\Omega_0\, h^2\,\mathrm{K} \qquad \text{mit} \qquad 0,5 \leq h \leq 1\,, \tag{26}$$

wobei

$$\Omega(t) = \frac{\varrho_m(t)}{\varrho_k(t)} \tag{27}$$

gilt. Hierin ist

$$\varrho_k(t) = 3M_{Pl}^2\, H^2(t) \tag{28}$$

mit dem Hubble Parameter

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{29}$$

die kritische Gesamtdichte, für die das Universum räumlich flach wird. Wir nehmen daher an, daß der sprunghafte Übergang von relativistisch zu nicht-relativistisch zu der Zeit t_1 stattfindet, zu der die Temperatur den in Gleichung (26) angegebenen Wert annimmt. Für alle Zeiten $t{>}t_2$ erfüllt die Temperatur $T(t)$ die Zustandsgleichung $T(t)\,a(t)$=const=$T_0\,a_0$, mit (9) haben wir daher $T_1\,x_1{=}T_0$. Hieraus, aus Gleichung (26) und mit dem ziemlich genau bekannten Wert $T_0{=}2,73\,\mathrm{K}$ der gegenwärtigen Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung erhalten wir für die Zeit t_1 die implizite Gleichung

$$x(t_1) = x_1 = \frac{4,2{\cdot}10^{-5}}{\Omega_0\, h^2}\,. \tag{30}$$

3 Lösung für die dynamische Entwicklung des Universums

Für den gegenwärtigen Zustand des Universums erhalten wir aus den Gleichungen (1) und (29)

$$H_0^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2}(\varrho_{m0} + \varrho_{s0} + \varrho_{d0})\,.$$

Zusammen mit der aus (28) folgenden Gleichung $\varrho_{k0}{=}3M_{Pl}^2\,H_0^2$ führt das zu

$$\varrho_{m0} + \varrho_{s0} + \varrho_{d0} = \varrho_{k0} \tag{31}$$

und

$$\frac{1}{3M_{Pl}^2} = \frac{H_0^2}{\varrho_{k0}}\,. \tag{32}$$

Mit Hilfe von (9) und (32) bringen wir Gleichung (1) jetzt in die Form

$$\dot{x}^2(t) = \frac{H_0^2}{\varrho_{k0}}(\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d)\,x^2\,, \tag{33}$$

und für spätere Zwecke führen wir die Definitionen

$$\varrho_{m0} = \Omega_0\varrho_{k0}\,, \qquad \varrho_{s0} = \omega_0\varrho_{k0}\,, \qquad \varrho_{d0} = \lambda_0\varrho_{k0} \tag{34}$$

ein, die mit Gleichung (31) zu

$$\Omega_0 + \omega_0 + \lambda_0 = 1 \tag{35}$$

führen.

Inflationäre Anfangsphase. In der inflationären Anfangsphase gilt $\varrho_m \equiv \varrho_s \equiv 0$, und Gleichung (33) reduziert sich auf

$$\frac{\dot{x}^2}{x^2} = H^2 = \frac{H_0^2}{\varrho_{k0}}\,\varrho_d\,, \tag{36}$$

wobei im ersten Schritt Gleichung (29) benutzt wurde. Differenziert man diese Gleichung nach t, benutzt die Gleichungen (16) und (19) und zieht einen Faktor H heraus, so erhält man

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2\,\varrho_{k0}\,\dot{H}(t)}{3\,H_0^2\,\dot{\Phi}(t)} = -\frac{2\,\varrho_{k0}}{3\,H_0^2}\,H'(\Phi)\,. \tag{37}$$

Im letzten Schritt wurde dabei angenommen, daß sich die Zeitabhängigkeit von H implizit durch eine explizite Abhängigkeit von Φ ausdrücken läßt. Gleichung (37) kann mit dem Ansatz

$$H(\Phi) = H(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha\Phi} \tag{38}$$

gelöst werden, der zu $H'(\Phi) = -\alpha H(\Phi)$ führt. Hiermit wird aus Gleichung (37)

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{2\,\alpha\,\varrho_{k0}\,H(0)}{3\,H_0^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha\Phi}\,,$$

und die Lösung ist

$$\Phi(t) = \frac{1}{\alpha}\ln(1+\gamma t) \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{2\alpha^2\varrho_{k0}H(0)}{3H_0^2}\,.$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir aus Gleichung (36)

$$\varrho_d(t) = \frac{\varrho_{k0}}{H_0^2}\,H^2 = \frac{\varrho_{k0}\,H^2(0)}{H_0^2\,(1+\gamma t)^2}\,. \tag{39}$$

Nach dem von uns benutzten Modell ist die Dichte $\varrho_d(t)$ zur Zeit t=0 gleich der Planck-Dichte ϱ_{Pl}. Hiermit erhalten wir aus Gleichung (39)

$$\frac{\varrho_{k0}\,H^2(0)}{H_0^2} = \varrho_{Pl}$$

und

$$\varrho_d(t) = \frac{\varrho_{Pl}}{(1+\gamma t)^2} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{2\alpha^2\sqrt{\varrho_{Pl}\varrho_{k0}}}{3H_0}\,. \tag{40}$$

Einsetzen in Gleichung (36), Ziehen der Wurzel und anschließende Integration liefert

$$\ln\frac{x(t)}{x(0)} = H_0\sqrt{\frac{\varrho_{Pl}}{\varrho_{k0}}}\int_0^t \frac{dt'}{1+\gamma t'} = H_0\sqrt{\frac{\varrho_{Pl}}{\varrho_{k0}}}\,\frac{\ln(1+\gamma t)}{\gamma}$$

oder

$$x(t) = x(0)(1+\gamma t)^\beta \qquad \text{mit} \qquad \beta = \frac{H_0\sqrt{\varrho_{Pl}/\varrho_{k0}}}{\gamma}\,. \tag{41}$$

Die Zeit t_2, zu der nach unserem Modell der größte Teil der dunklen Energie in Energie von Strahlung und Materie überführt wird, muß vor der Entstehung der Quarks liegen, jedoch so spät, daß sich keine merkliche Dichte unerwünschter Relikte wie magnetischer Monopole entwickeln konnte. Diese Bedingung wird durch die Wahl $\lim_{\epsilon\to 0}\varrho_d(t_2-\epsilon) = 10^{80}\,\mathrm{kg/m^3}$ oder

$$\lim_{\epsilon\to 0}\varrho_d(t_2-\epsilon) = F\varrho_{Pl} \qquad \text{mit} \qquad F = 2\cdot 10^{-17} \tag{42}$$

erfüllt. Aus (40) und (42) ergibt sich für die Zeit t_2 des Phasenübergangs

$$t_2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}-1\right). \tag{43}$$

Hiermit und mit $x_2{=}x(t_2)$ gemäß Gleichung (41) erhalten wir

$$x(0) = F^{\beta/2}\,x_2\,. \tag{44}$$

Relativistische Ära. In der relativistischen Ära erfüllt die Dichte $\varrho{=}\varrho_m{+}\varrho_s$ Gleichung (24), wobei x_1 durch (30) gegeben ist. In der nicht-relativistischen Ära erfüllt ϱ_m die erste der Gleichungen (25), womit wir $\varrho_{m1}x_1^3{=}\varrho_{m0}{=}\Omega_0\varrho_{k0}$ erhalten, und mit der zweiten Gleichung ergibt sich $\varrho_{s1}\,x_1^4{=}\varrho_{s0}{=}\omega_0\,\varrho_{k0}$ mit der Folge

$$\varrho_1 = \varrho_{m1}+\varrho_{s1} = \varrho_{k0}\left(\frac{\Omega_0}{x_1^3}+\frac{\omega_0}{x_1^4}\right) = \frac{\varrho_{k0}}{x_1^4}\,(\Omega_0 x_1+\omega_0)\,.$$

Hiermit erhalten wir aus Gleichung (24)

$$\varrho(t) = \frac{\varrho_{k0}(\Omega_0 x_1+\omega_0)}{x^4(t)}\,. \tag{45}$$

Wird dies und Gleichung (42) in die Bedingung (22) für den Phasenübergang eingesetzt und die letztere nach x_2 aufgelöst, so ergibt sich

$$x_2 = \left[\frac{\varrho_{k0}(\Omega_0 x_1+\omega_0)}{F\varrho_{Pl}}\right]^{1/4}. \tag{46}$$

Für $t_2{\le}t{\le}t_1$ und $\Omega_0{\ge}0,2$ erhalten wir mit Hilfe der Gleichungen (35), (45) und $\varrho_d{=}\varrho_{d0}{=}\lambda_0\varrho_{k0}$ aus $x{\le}x_1$ mit (30) die Bedingung

$$\frac{\varrho_d}{\varrho} = \frac{\lambda_0 x^4}{\Omega_0 x_1+\omega_0} \le \frac{\lambda_0 x_1^3}{\Omega_0} \le 10^{-10}\,,$$

die bedeutet, daß ϱ_d in der relativistischen Ära vernachlässigt werden kann. Hiermit folgt aus Gleichung (33) $\dot{x}^2(t) = H_0^2\varrho\,x^2/\varrho_{k0}$ oder mit (45)

$$\dot{x} = \frac{H_0\sqrt{\Omega_0 x_1+\omega_0}}{x}\,. \tag{47}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = x_2\left[1+\frac{2H_0\sqrt{\Omega_0 x_1+\omega_0}}{x_2^2}\,(t-t_2)\right]^{1/2}. \tag{48}$$

Durch Inversion und unter Vernachlässigung von x_2 gegenüber x_1 sowie t_2 gegenüber t_1 – Gleichung (30) und (46) bzw. (43) und das Ergebnis (49) machen das möglich –, erhalten wir für die Zeit t_1, zu der $x(t_1){=}x_1$ gilt,

$$t_1 = \frac{x_1^2}{2H_0(\Omega_0 x_1+\omega_0)^{1/2}}\,. \tag{49}$$

Materiedominierte Ära. In der nicht-relativistischen Ära, die kurz nach dem Zeitpunkt t_1 materiedominiert wird ($\varrho_m \gg \varrho_s$), müssen die Gleichungen (25)benutzt werden. Mit diesen und den Definitionen (34) erhalten wir aus Gleichung (33)

$$\dot{x}(t) = H_0 \frac{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x + \lambda_0 x^4}}{x} . \tag{50}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert die implizite Lösung

$$t(x) = t_1 + \frac{1}{H_0} \int_{x_1}^{x} \frac{x'\, dx'}{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x' + \lambda_0 {x'}^4}} . \tag{51}$$

Aus dieser ergibt sich als heutiges Alter des Universums

$$t_0 = t(1) = t_1 + \frac{1}{H_0} \int_{x_1}^{1} \frac{x'\, dx'}{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x' + \lambda_0 {x'}^4}} . \tag{52}$$

Da $t(x)$ monoton mit x zunimmt, kann die explizite Lösung $x(t)$ leicht durch numerische Inversion aus $t(x)$ erhalten werden.

Teilchenhorizont und Bestimmung des Faktors β. Der gegenwärtige metrische Abstand der Grenze des sichtbaren Universums von uns ist gleich der Strecke, die ein frei fliegendes Photon während der dem heutigen Alter des Universums entsprechenden Zeitspanne zurückgelegt hätte, wobei mit einberechnet werden muß, daß sowohl bereits zurückgelegte Strecken als auch noch vor dem Photon liegende Strecken durch die Expansion des Universums vergrößert werden. Er wird als Teilchenhorizont bezeichnet und ist durch die Formel

$$d_0 = \int_0^{t_0} \frac{dt}{x(t)} \tag{53}$$

gegeben. In dieser müssen die für die verschiedenen Äras erhaltenen Lösungen eingesetzt werden. Unter Benutzung von (41), (47) und (50) erhalten wir so

$$d_0 = d_{02} + d_{01} + d_{00} \tag{54}$$

mit

$$\begin{aligned} d_{02} &= \int_0^{t_2} \frac{dt}{x(0)(1+\gamma t)^\beta} = \frac{1}{\gamma\, x(0)(1-\beta)} \left[F^{\frac{\beta-1}{2}} - 1 \right] \\ &\approx \frac{F^{-\beta/2}}{H_0 \sqrt{\varrho_{Pl}/\varrho_{k0}}\,(1-1/\beta) x_2} , \end{aligned} \tag{55}$$

wobei die Gleichungen (43) und (44) eingesetzt, die Eigenschaft $F \ll 1$, die zweite der Gleichungen (41) sowie das später verifizierte Ergebnis $\beta > 2$ mit der Folge $F^{(\beta-1)/2} \ll 1$ benutzt wurden, außerdem mit

$$d_{01} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dt}{x(t)} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x(t)\dot{x}(t)} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{H_0 \sqrt{\Omega_0 x_1 + \omega_0}} = \frac{x_1 - x_2}{H_0 \sqrt{\Omega_0 x_1 + \omega_0}} \tag{56}$$

und mit

$$d_{00} = \int_{x_1}^{1} \frac{dx}{x(t)\dot{x}(t)} = \frac{1}{H_0} \int_{x_1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x + \lambda_0 x^4}} \,. \tag{57}$$

Der in der Lösung (41) eingeführte Exponent β kann als einzige bislang unbestimmt gebliebene Größe angesehen werden, denn γ kann mit Hilfe der zweiten der Gleichungen (41) durch ihn und der im Ansatz (38) eingeführte Faktor α kann mit Hilfe der zweiten der Gleichungen (40) durch γ ausgedrückt werden. Durch Vorgabe der Länge $d(t)=x(t)\,d_0$ des heutigen Teilchenhorizonts zur Zeit t=0 (Expansionsbeginn) können wir β festlegen. Eine dem hier benutzten Modell angepaßte Wahl ist

$$d(0) = x(0)\, d_0 = L_{Pl} \,. \tag{58}$$

Werden hierin die Gleichungen (54)–(57) eingesetzt, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen (44), (41), (40), (30) und (46) für $x(0)$, γ, α, x_1 und x_2, der empirischen Werte

$$\Omega_0 = 0,2 \,, \quad \omega_0 = \frac{2,6 * 10^{-5}}{h^2} \,, \quad h = 0,75 \,, \quad \varrho_{k0} = h^2{\cdot}1,9{\cdot}10^{-26}\,\mathrm{kg\ m}^{-3} \tag{59}$$

sowie mit

$$\varrho_{Pl} = 5,16{\cdot}10^{96}\,\mathrm{kg\ m}^{-3} \,, \qquad L_{Pl} = 1,62{\cdot}10^{-35}\,\mathrm{m} \tag{60}$$

nach numerischer Auswertung des Integrals für d_{00} den Wert β=4, 10256. Es bietet sich an, stattdessen den glatten Wert

$$\beta = 4 \tag{61}$$

zu wählen und dafür die Bedingung (58) leicht in

$$d(0) = x(0) d_0 = \lambda\, L_{Pl} \tag{62}$$

abzuwandeln. Mit der Wahl (61) erhalten wir aus (41), (40) und (44)

$$\gamma = \frac{H_0}{4} \sqrt{\frac{\varrho_{Pl}}{\varrho_{k0}}} \,, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{3}{8 \varrho_{k0}}}\, H_0 \,, \qquad x(0) = F^2 x_2 \,. \tag{63}$$

Die numerische Auswertung von Gleichung (52) bzw. der Gleichungen (54)–(57) liefert t_0=14·10^9 Jahre bzw. 56·10^9 Lichtjahre, während sich aus Gleichung (62) λ=4, 45 ergibt.

4 Berechnung der Gesamtenergien

Aus dem Radius $d(0)$, den das heute sichtbare Universum zur Zeit t=0 hatte, erhalten wir für das Volumen $V(t)$ zu dieser Zeit

$$V(0) = \frac{4\pi}{3} \lambda^3 L_{Pl}^3 \,. \tag{64}$$

Durch die Expansion des Universums wird daraus zur Zeit t das Volumen

$$V(t) = \frac{4\pi\, x^3(t)}{3\, x^3(0)}\, \lambda^3 L_{Pl}^3 \,. \tag{65}$$

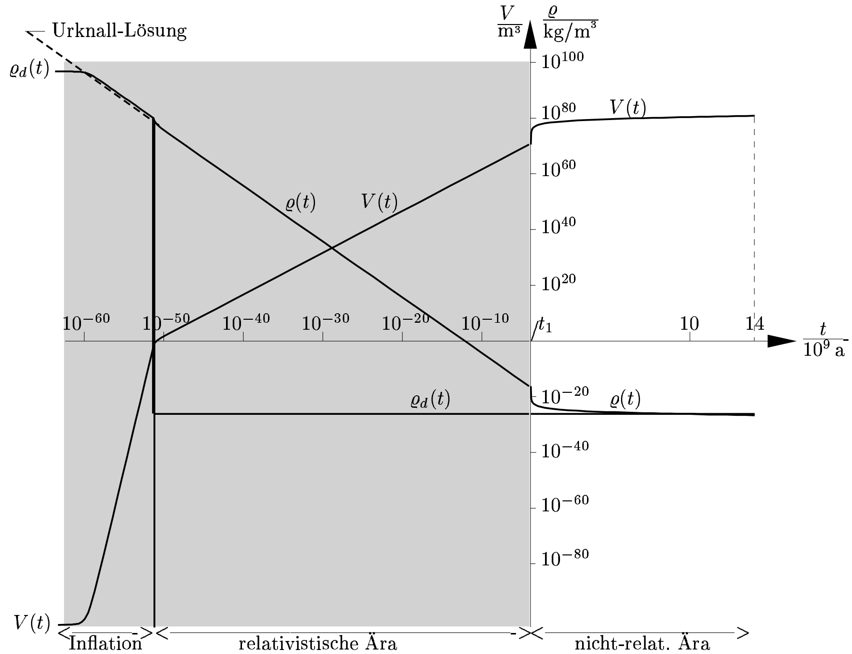

Abbildung 1: Zeitentwicklung der Dichten $\varrho_d(t)$, $\varrho(t)=\varrho_m(t)+\varrho_s(t)$ und des Volumens $V(t)$. Man beachte, daß für die Zeitachse zwei verschiedene Skalen benutzt sind: In dem grau unterlegten Gebiet linker Hand ist die Zeit logarithmisch aufgetragen, rechts davon linear. Für Dichte und Volumen ist dagegen durchgängig eine logarithmische Skala gewählt. Die gestrichelte Kurve links oben repräsentiert die Dichte $\varrho(t)$ einer reinen Urknall-Lösung und divergiert im Urknall.

Die Gesamtmasse bzw. -energie der im Volumen $V(t)$ enthaltenen Energiesorte i (Dichte ϱ_i) ist

$$E_i(t) = \varrho_i(t)V(t) = \frac{4\pi\, x^3(t)}{3\, x^3(0)}\, \lambda^3\, L_{Pl}^3\, \varrho_i(t)\,. \tag{66}$$

Hierin müssen für das Zeitintervall $0{\le}t{<}t_2$ für die dunkle Gesamtenergie die Gleichungen (40) und (41) mit (61) und (63) eingesetzt werden. Da während dieser Ära $\varrho_m{\equiv}\varrho_s{\equiv}0$ gilt, stammt die einzige weitere Energie von der Gravitation und ist nach (18) durch

$$E_g(t) = -E_d(t) \tag{67}$$

gegeben.
Für das Zeitintervall $t_1{\le}t{\le}t_2$ ergibt sich die Gesamtmasse bzw. -energie $E(t)$ von Strahlung und Materie mit $\varrho_i(t){\to}\varrho(t)$ aus (66), indem man (45) und (48) einsetzt, während sich die dunkle Gesamtenergie durch Einsetzen von Gleichung (21) und der letzten der Gleichungen (34) ergibt, wobei nach (35) $\lambda_0{=}1{-}\Omega_0{-}\omega_0$ gilt. Die Gravitationsenergie ergibt sich aus Gleichung (18) zu

$$E_g(t) = -E_d(t) - E(t)\,. \tag{68}$$

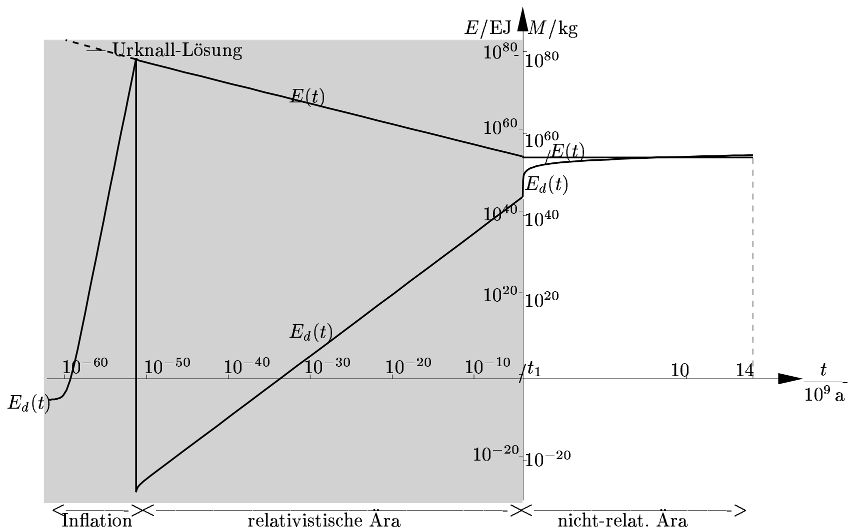

Abbildung 2: Zeitentwicklung der im heute sichtbaren Universum enthaltenen Gesamtmassen bzw. -energien $E_i(t)$ (mit Ausnahme der kosmischen Gravitationsenergie). (Siehe Abb. 1 bezüglich der zwei für t benutzten Zeitskalen.) Die gestrichelte Kurve links oben repräsentiert die zu einer reinen Urknall-Lösung gehörige Energie $E(t)$ von Strahlung und Materie und divergiert zur Zeit des Urknalls.

Schließlich erhalten wir für das Zeitintervall $t_1<t\leq t_0$ aus den Gleichungen (8) und (25) mit $V_0=4\pi d_0^3/3$ für die Gesamtenergie von Strahlung und Materie

$$E(t) = [\varrho_m(t) + \varrho_s(t)]\, x^3(t)\, V_0 = \left[\varrho_{m0} + \frac{\varrho_{s0}}{x(t)}\right] V_0 = \frac{4\pi d_0^3}{3} \left[\varrho_{m0} + \frac{\varrho_{s0}}{x(t)}\right] . \qquad (69)$$

Dabei ist $x(t)$ die Inverse der durch Gleichung (51) definierten Funktion $t(x)$, und für die dunkle Energie erhalten wir

$$E_d(t) = \frac{4\pi\, \varrho_{d0} d_0^3}{3}\, x^3(t) . \qquad (70)$$

In Abb. 1 ist für die verschiedenen Äras die zeitliche Entwicklung der Dichten $\varrho_i(t)$ und des Volumens $V(t)$ dargestellt. Während für $\varrho_i(t)$ und $V(t)$ durchgängig eine logarithmische Darstellung gewählt wurde, ist die Zeit nur für das in der Abbildung grau unterlegte Zeitintervall $t\leq t_1$ logarithmisch aufgetragen, für das Zeitintervall $t_1\leq t\leq t_0$ dagegen linear. Die Dichte $\varrho_d(t)$ der dunklen Energie nimmt von $t=0$ bis $t=t_2$ monoton ab und bleibt nach ihrem im Phasenübergang erfolgten Sprung auf den Wert ϱ_{d0} zeitlich konstant. Nach dem Phasenübergang nehmen die Dichten $\varrho_m(t)$ und $\varrho_s(t)$ sowie ihre Summe $\varrho(t)$ monoton ab, während $V(t)$ aufgrund der Expansion des Universums permanent zunimmt.
In Abb. 2 ist die zeitliche Entwicklung der im gegenwärtig sichtbaren Universum enthaltenen Gesamtmassen bzw. -energien $E_i(t)$ (mit Ausnahme der Gravitationsenergie) aufgetragen. $E_d(t)$ beginnt in der Inflationsära mit einem der Masse weniger Milligramm entsprechenden Wert und nimmt trotz Abnahme der Dichte $\varrho_d(t)$ sehr schnell zu, weil diese Abnahme durch

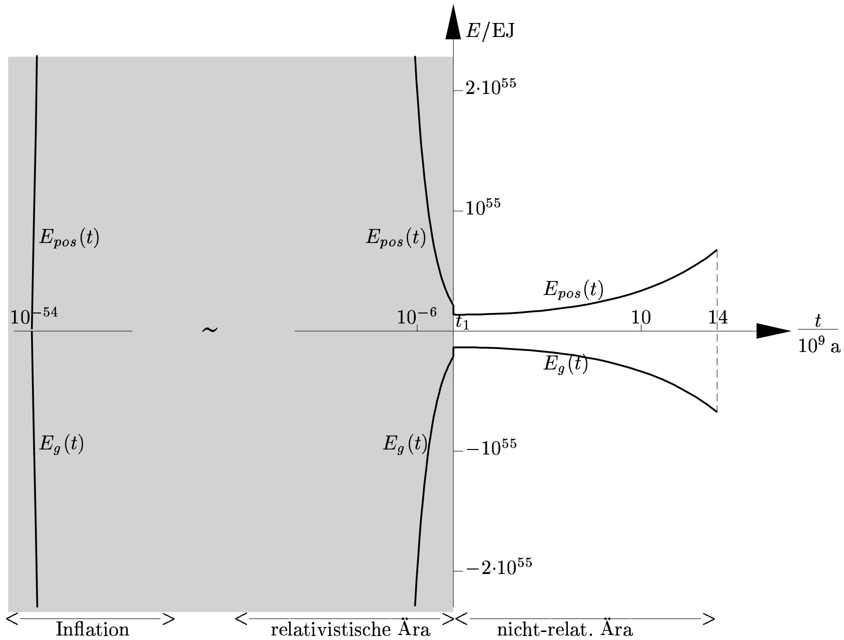

Abbildung 3: Zeitentwicklung der Energien $E_g(t)$ und $E_{pos}(t){=}E_d(t){+}E_m(t){+}E_s(t)$ in linearer Auftragung, jedoch wie in Abb. 1 mit unterschiedlicher Zeitskala vor und nach t_1. Die kurz nach t_1 beginnende und bis heute andauernde Zunahme von $E_{pos}(t)$ beruht im wesentlichen auf der Zunahme von $E_d(t)$.

die inflationäre Zunahme des Volumens bei weitem überkompensiert wird. Die zur Energiezunahme führende Arbeitszufuhr wird vom negativen Druck $p_d{\approx}{-}V(\Phi)$ des Inflatons geleistet, und dasselbe gilt auch für die viel kleineren Werte $E_d(t)$ nach dem Phasenübergang. Der positive Druck relativistischer Teilchen führt bei der Expansion des Universums dagegen zu einer Arbeitsabgabe und damit Abnahme der Gesamtenergie $E(t){=}E_s(t){+}E_m(t)$ von Strahlung und Materie. Wegen der durch Gleichung (18) ausgedrückten Energieerhaltung muß diese Energie im wesentlichen der Gravitationsenergie zugute kommen, die daher zunimmt. Da diese jedoch negativ ist, bedeutet ihre Zunahme den Übergang zu weniger negativen Werten bzw. kleineren Absolutwerten. Die auf der Zustandsgleichung (7) beruhende Erhaltung der Energie $E_m(t)$ für $t{\geq}t_1$ kommt dadurch zustande, daß der Druck von Teilchen nicht-verschwindender Ruhemasse in der nicht-relativistischen Ära vernachlässigt werden kann, weshalb in Gleichung (2) $p_m{\ll}\varrho_m$ gilt.
In Abb. 3 sind $E_g(t)$ und $E_{pos}(t){=}E_d(t){+}E_m(t){+}E_s(t)$ linear (also nicht-logarithmisch) über einer Zeitachse aufgetragen, die wie in den Abbildungen 1 und 2 vor und nach t_1 unterschiedlich skaliert ist. Die Abnahme der Gravitationsenergie bis zur Zeit t_2 und ihre Zunahme danach können durch die Wirkung eines Drucks des tensoriellen Gravitationsfeldes und die Expansion des Universums erklärt werden. Werden in Gleichung (2) die Dichten mit

Hilfe von Gleichung (1) eliminiert, so ergibt sich

$$p_m + p_s + p_d + p_g = 0 \qquad \text{mit} \qquad p_g = M_{Pl}^2 \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) . \tag{71}$$

p_g hat die Dimension eines Drucks, stammt von der linken Seite der Feldgleichungen (14) ab und kann daher als Druck des kosmischen Gravitationsfeldes interpretiert werden. Während der Inflation gilt $p_m{=}p_s{=}0$ und nach Gleichung (71) daher $p_g{=}{-}p_d{\approx}V(\Phi)\geq 0$. Ein positiver Druck leistet während der Expansion des Universums Arbeit, weshalb die Gravitationsenergie abnehmen muß. Nach dem Phasenübergang wird p_d vernachlässigbar klein und $p_g{=}{-}(p_m{+}p_s)\leq 0$, der gravitative Druck leistet negative Arbeit und die Energie des Gravitationsfeldes nimmt daher zu.

Anhang: Negativität der gravitativen Feldenergie

Um zu einem einfachen Verständnis dafür zu gelangen, warum die Energie von Gravitationsfeldern negativ ist, betrachten wir den Newtonschen Grenzfall des vektoriellen Gravitationsfeldes, das von einer Masse m erzeugt wird, die gleichmäßig in einer vom Radius $r_s{-}\epsilon$ bis zum Radius r_s reichenden Kugelschale verteilt ist. Im Gebiet $0{\leq}r{\leq}r_s{-}\epsilon$ verschwindet das Gravitationsfeld, weshalb dieses auch keine Feldenergie enthält. Wir nehmen an, die Dicke ϵ der Kugelschale ist so klein, daß die in ihr enthaltene Feldenergie gegenüber der außerhalb von ihr lokalisierten Feldenergie vernachlässigt werden kann. Jetzt vergleichen wir zwei Fälle, Fall 1 mit $r_s{=}r_1$ und Fall 2 mit $r_s{=}r_2{\gg}r_1$. Da das Gravitationsfeld im Bereich $r{>}r_2$ in beiden Fällen dasselbe ist, überschreitet der Absolutwert der Gesamtenergie des Feldes im ersten den des zweiten Falls um den Betrag der im Gebiet $r_1{\leq}r{\leq}r_2$ enthaltenen Energie. Da das Gravitationsfeld andererseits in der die Masse m enthaltenden Kugelschale auf das Kugelzentrum hin gerichtet ist, leisten die auf die Massenverteilung einwirkenden Gravitationskräfte bei der Verschiebung der Kugelschale von $r_s{=}r_2$ nach $r_s{=}r_1$ Arbeit, die der Gravitationsenergie verloren gehen muß. Deren Abnahme ist mit der Zunahme ihres Betrages jedoch nur vereinbar, wenn sie negativ ist.

Literatur

[1] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, Kap. 3 (2000)

[2] Kap. 14 von [1]

[3] A. D. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983)

[4] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood, Chur Switzerland (1990)

[5] J. Traschen and R. Brandenberger, Phys. Rev. D **42**, 2491 (1990)

[6] Kap. 2 von [1]