Kosmischer Ursprung und Zeitentwicklung der von der Menschheit genutzten Energie

E. Rebhan, Inst. f. Theor. Physik, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1. Kosmologische Grundgleichungen für flaches Universum
2. Einordnung der von der Menschheit genutzten Energien
3. Singularität der globalen Energien bei reinen Urknallmodellen
4. Erhaltungssatz für globale Energien
5. Kosmologisches Modell mit Inflation
6. Berechnung der globalen Energien (Zeitentwicklung)
7. Grund für Zu- bzw. Abnahme der globalen Energien

1. Kosmologische Grundgleichungen für flaches Universum

Mit $h = c = 1$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}^2(t) &= \frac{1}{3M_{Pl}^2}(\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d)\, a^2 \\
\ddot{a}(t) &= -\frac{1}{6M_{Pl}^2}[\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d + 3(p_m + p_s + p_d)]\, a\,.
\end{aligned}
$$

t	=	kosmische Zeit
$a(t)$	=	kosmischer Skalenfaktor
M_{Pl}	=	Planck-Masse
ρ	=	Massendichte = Energiedichte
p	=	Druck
$_m$	=	Index für Materie
$_s$	=	Index für Strahlung
$_d$	=	Index für dunkle Energie

Herkunft aus Einsteins Feldgleichungen, erweitert um Energie-Impuls-Tensor für räumlich homogenes Skalarfeld Φ(t) (für dunkle Energie):

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{1}{M_{Pl}^2} \left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(d)} \right]}$$

mit

$$T_{\mu\nu}^{(d)} = (\partial_\mu \Phi)(\partial_\nu \Phi) - \mathcal{L}\, g_{\mu\nu}$$ mit $$\mathcal{L} = g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \Phi)(\partial_\beta \Phi) - V(\Phi)\,.$$

Zu Φ(*t*) gehörige Massen- bzw. Energiedichte ρ_d sowie Druck p_d

$$\boxed{\varrho_d = T_{00}^{(d)} = \dot{\Phi}^2 - \mathcal{L} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \qquad p_d = \mathcal{L} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi)\,.}$$

Dazu Zustandsgleichungen:

$p_i = \rho_i/3$ für Strahlung und relativistische Materie

$p_m = 0$ für nicht-relativistische Materie

Kombination mit den kosmolog. Gleichungen führt zu

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \varrho_i(t)\,a^4(t) & = & \text{const} & \text{für Strahlung und relativistische Materie} \\ \varrho_m(t)\,a^3(t) & = & \text{const} & \text{für nicht-relativistische Materie}\,. \end{array}}$$

Für dunkle Energie folgt mit $H = \dot{a}/a$ = Hubble-Zahl

$$\boxed{\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0}$$

"Schwingungsgleichung" für Φ im Potential $V(\Phi)$,
Reibungsterm ~ "Geschwindigkeit" $\dot{\Phi}$ => $\dot{\Phi}$ vernachlässigbar,

$$\boxed{\varrho_d \approx V(\Phi)\,, \qquad p_d \approx -V(\Phi) \approx -\varrho_d\,.}$$

2. Einordnung der von der Menschheit genutzten Energien

Fossile Energien: Kohle, Erdöl, Gas : von der Sonne

Kernenergie:

- Fission (Uran) : von den Resten einer Supernova
- Fusion (Deuterium und Tritium): kosmisches Substrat

Erneuerbare Energien:

- Windenergie : Sonne + Erdrotation (Katalysator)
- Solarenergie: Sonne
- Wasserkraft: Sonne + Erdgravitation (Katalysator)
- Biomasse: Sonne
- Erdwärme: kosmisches Substrat

Energie der Sonne aus Kernfusion im Sonnenzentrum

Alles von der im Universum verteilten Materie + darin enthaltenen Energien.

Wieviel Energie ist das?

Dichte der leuchtenden Materie: $\rho_{lm0} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-28}$ kg/m^3.
Heutiger Radius des heute sichtbaren Universums:
$d_0 \approx 4ct_0$ mit t_0 = 14 Mrd Jahre.

$$\boxed{\Rightarrow E_{lm0} = \frac{4\pi}{3}\, d_0^3\, \varrho_{lm0} \approx 1.3{\cdot}10^{52}\,\mathrm{EJ}}$$

$0{,}3 \cdot 10^{50}$-faches des jährlichen Energieverbrauchs der Menschheit.

3. Singularität der globalen Energien bei reinen Urknallmodellen

t_0 = seit Beginn der Expansion bis heute vergangene Zeit
$\approx$ 14 Mrd Jahre

$V_0 = V(t_0)$ Gesamtvolumen des heute sichtbaren Universums

$x(t) = a(t)/a_0 = a(t)/a(t_0)$ = relativer Expansionsfaktor

Volumen des heute sichtbaren Universums zur Zeit t:

$$V(t) = x^3(t)\, V_0 \,.$$

Darin enthaltene Energie der Materie:

$$E_m(t) = \varrho_m(t)\, V(t) = \varrho_m(t)\, a^3(t)\, \frac{V_0}{a_0^3} \,.$$

Für kalte Materie mit $\rho_m(t)\, a^3(t)$ = const = $\rho_{m0}\, a_0^3$ folgt daraus

$$E_m(t) = \varrho_{m0}\, a_0^3\, \frac{V_0}{a_0^3} = \varrho_{m0}\, V_0 = E_{m0}$$ (Energieerhaltung)

Für relativistische Materie (heiße Frühphase des Universums):

$$E_m(t) = \varrho_m(t)\, a^4(t)\, \frac{V_0}{a(t)a_0^3} \sim \frac{1}{a(t)}$$

Lösung der kosmolog. Gleichungen ohne dunkle Energie für kleine *t*:

$$a(t) \sim \sqrt{t}\,.$$

Folge Singularität für $t \to 0$:

$$\boxed{E_m(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \longrightarrow \infty \qquad \text{obwohl} \qquad V(t) \sim t^{3/2} \longrightarrow 0\,.}$$

Wie ist das energetisch möglich?

4. Erhaltungssatz für globale Energien

Umschreiben der kosmologischen Gleichungen:

$$\boxed{\varrho_m + \varrho_s + \varrho_d + \varrho_g = 0 \qquad \text{mit} \qquad \varrho_g = -3M_{Pl}^2\,\dot{a}^2(t)/a^2}$$

(0-0-Komponente der Feldgleichungen).

- ρ_g hat Dimension von Massen- bzw. Energiedichte
- stammt von $R_{\mu\nu}$ - $Rg_{\mu\nu}/2$ (Krümmungsterme; diese beschreiben die Gravitation)

$\Rightarrow$ ρ_g = Dichte des kosmischen Gravitationsfeldes.

Multiplikation der Gleichung für Dichten mit $V(t)$ mit E(t)=V(t)

$$\boxed{E_m + E_s + E_d + E_g = 0}$$

(Globaler Energieerhaltungssatz)

Für $\boldsymbol{t} \rightarrow \mathbf{0}$ gilt $\boldsymbol{E_m} \rightarrow \infty$ und $\boldsymbol{E_s} \rightarrow \infty$, mit $\boldsymbol{E_d} = \mathbf{0}$ folgt $\boldsymbol{E_g} \rightarrow -\infty$.

Vermeidung der Singularität durch Inflation vor Beinahe-Urknall!

Dunkle Materie und Inflation benötigt zu:

- Erklärung der Homogenität der Hintergrundstrahlung,
- Homogenität der Nukleosynthese
- Strukturbildung (Galaxien)
- Alter des Universums

Ziel: Berechnung der Funktionen $\boldsymbol{E_i(t)}$ für kosmol. Modell mit Inflation.

5. Kosmologisches Modell mit Inflation

- Räumlich flaches Universum endlicher Ausdehnung
- eingebettet in unendlich ausgedehntes Superuniversum

(wie beim Modell der chaotischen Inflation von A. Linde).

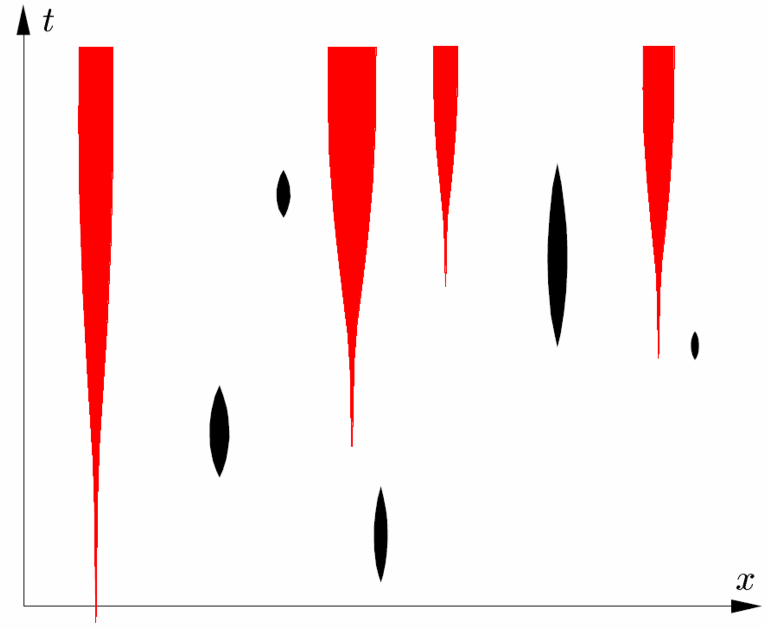
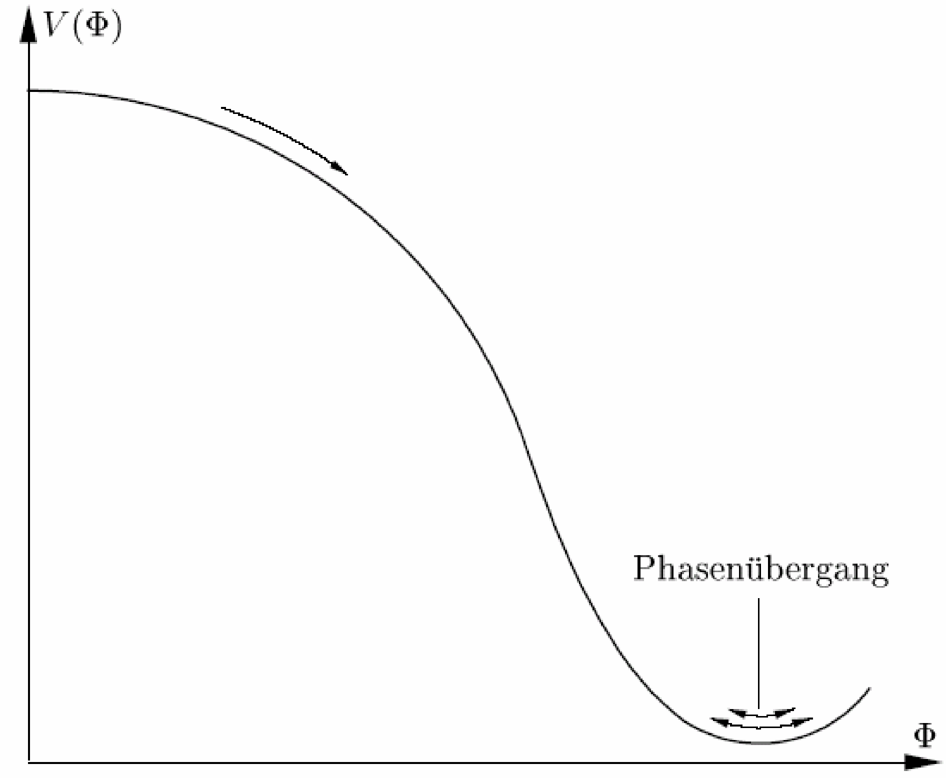


Abbildung 1. Modell der chaotischen Inflation von A. Linde.

Inflationäre Phase $0 \le t \le t_2$.

Nur dunkle Energie ($\rho_m = \rho_s = \mathbf{0}$), beschrieben durch Skalarfeld $\Phi = \Phi(t)$ mit Dynamik

$$\boxed{\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0\,.}$$



Zerfall der Energie des Feldes Φ wird als instantaner Phasenübergang behandelt. Findet statt bei Dichte

$$\varrho_{d2} = \varrho_d(t_2) = F \cdot \varrho_{Pl} = 10^{80}\,\mathrm{kg\ m^{-3}} \quad \text{mit} \quad F = 2 \cdot 10^{-17}\,.$$

Phasenübergang:

$$\varrho_d(t_2) \longrightarrow \varrho_{d0} \qquad \text{(heutiger Wert)}$$

$$\varrho_m(t_2) + \varrho_s(t_2) \longrightarrow \varrho_d(t_2) - \varrho_{d0} \approx \varrho_d(t_2)\,.$$

Lösung bis zum Zerfall der Energie des Feldes Φ:

$$x(t) = x(0)(1+\gamma t)^{\beta} \quad \text{mit} \quad \gamma = \gamma(\beta)\,,$$

$$\varrho_d(t) = \frac{\varrho_{Pl}}{(1+\gamma t)^2}\,. \qquad \text{(Darin } \beta \text{ unbestimmt.)}$$

Folge:

$$t_2 = \frac{1}{\gamma\sqrt{F}}\,.$$

Relativistische Ära $t_2 \leq t \leq t_1$.

$$\varrho = \varrho_m + \varrho_s\ , \qquad \varrho_d = \varrho_{d0}$$ vernachlässigbar

Mit $\rho(t)\, x^4(t) = \rho_1\, x_1^4$ Lösung bis t_1

$$x(t) = x_2 \left[1 + \frac{2H_0\sqrt{\Omega_0 x_1 + \omega_0}}{x_2^2}\,(t - t_2)\right]^{1/2}, \qquad \varrho(t) = \frac{\varrho_{c0}(\Omega_0 x_1 + \omega_0)}{x^4(t)}\,.$$

Übergang relativistisch $\rightarrow$ nicht-relativistisch instantan zur Zeit $t = t_1$.

Nicht-relativistische Ära $t_2 \leq t \leq t_1$

$$\varrho_m x^3 = \varrho_{m0}\,, \qquad \varrho_s x^4 = \varrho_{s0}\,, \qquad \varrho_d = \varrho_{d0}\,.$$

Implizite Lösung

$$\boxed{t(x) = t_1 + \frac{1}{H_0}\int_{x_1}^{x} \frac{x'\,dx'}{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x' + \lambda_0 x'^4}}\,,}$$

daraus *x*(*t*) durch numerische Inversion.

Weltalter

$$t_0 = t(1) = t_1 + \frac{1}{H_0}\int_{x_1}^{1} \frac{x'\,dx'}{\sqrt{\omega_0 + \Omega_0 x' + \lambda_0 x'^4}}$$

Dabei

$$\Omega_0 = \frac{\varrho_{m0}}{\varrho_{c0}}\,, \qquad \omega_0 = \frac{\varrho_{s0}}{\varrho_{c0}}\,, \qquad \lambda_0 = \frac{\varrho_{d0}}{\varrho_{c0}}\,, \qquad \varrho_{c0} = \varrho_{m0} + \varrho_{s0} + \varrho_{d0}\,.$$

Rand des heute sichtbaren Universums.

Abstand Rand von uns = von freiem Photon von $t = 0$ bis heute ($t = t_0$) durchlaufene Strecke (Teilchenhorizont)

Infl. relat. nicht-rel.

$$d_0 = \int_0^{t_0} \frac{dt}{x(t)} = d_{02} + d_{01} + d_{00} \,.$$

Hängt von unbekanntem Faktor β ab.

Bestimmung von β

Annahme: $d_0 = d(t_0)$ geht durch Expansion aus $d(0) = \lambda L_{Pl}$ hervor, d.h.

$$d(0) = x(0) d_0 \overset{!}{=} \lambda L_{Pl} \,.$$

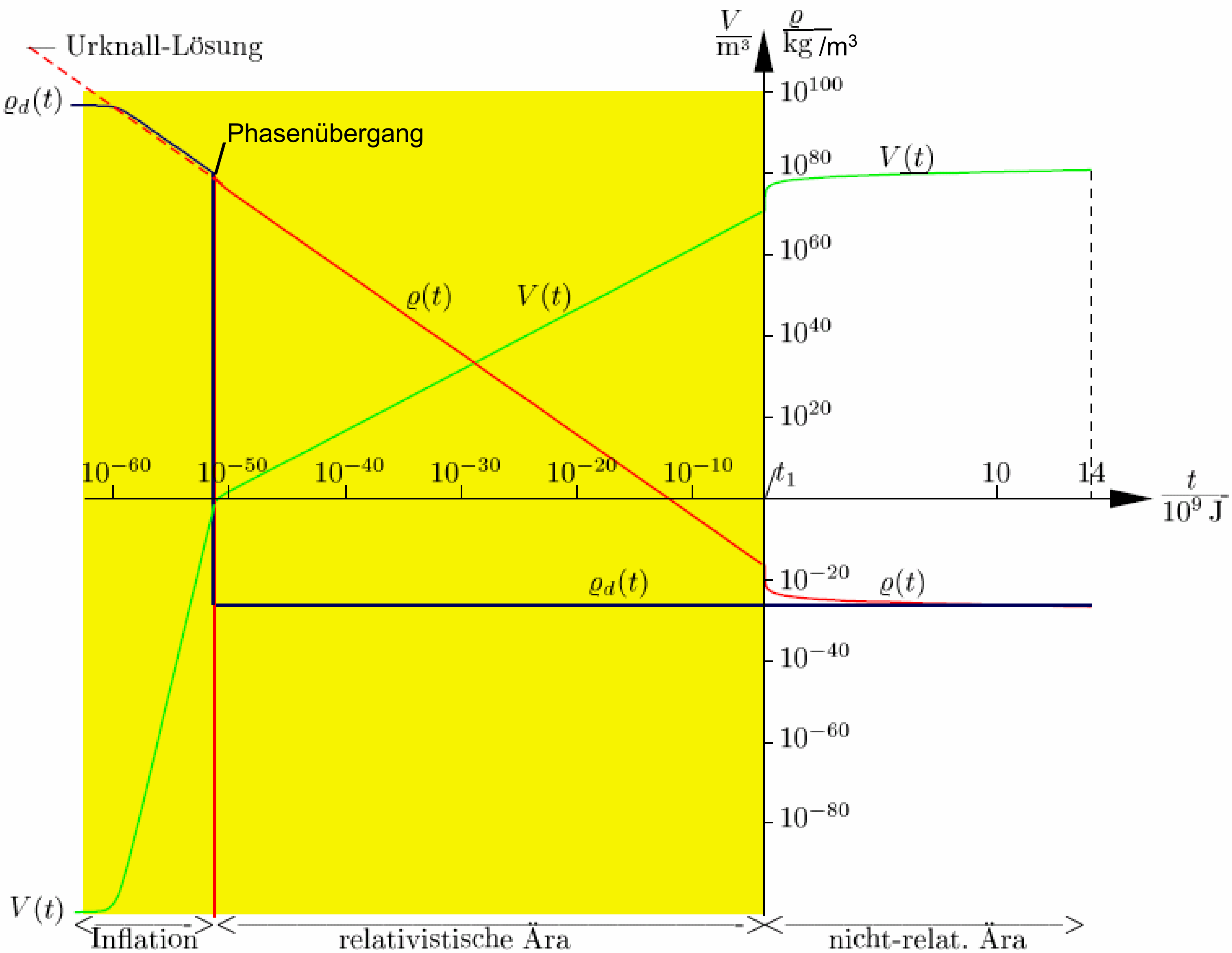
Dabei $\lambda = O(1)$ so gewählt, dass β einfach wird. Ergebnis: $\lambda = 4{,}45$

$\beta = 4$ und $d_0 = 4 c t_0 \,.$

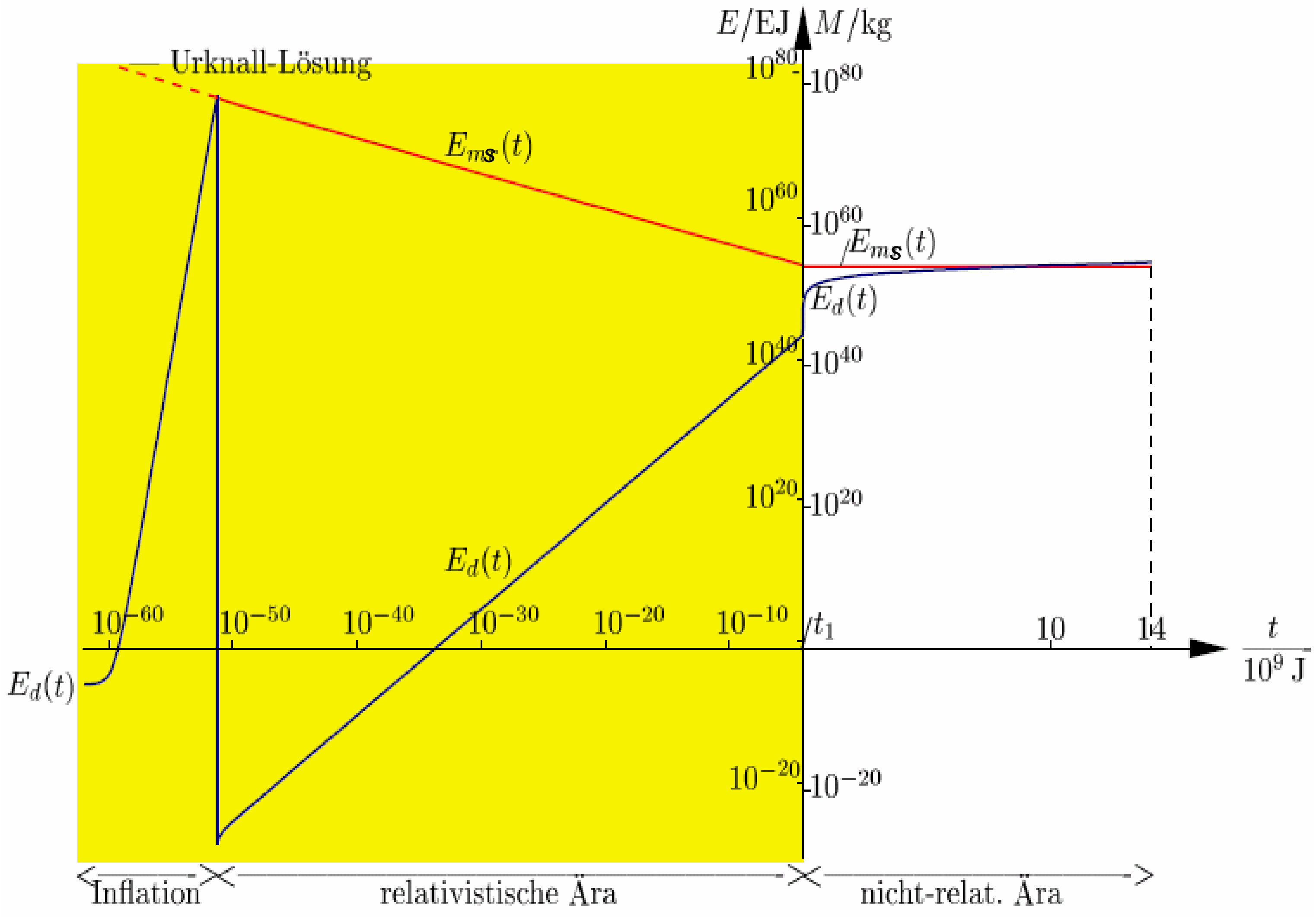
6. Globale Energien

$$E_i(t) = \varrho_i(t)V(t) = \varrho_i(t)x^3(t)V_0$$ mit $$V_0 = \frac{4\pi}{3}d_0^3\,.$$

Einsetzen der Ergebnisse für die drei Äras.

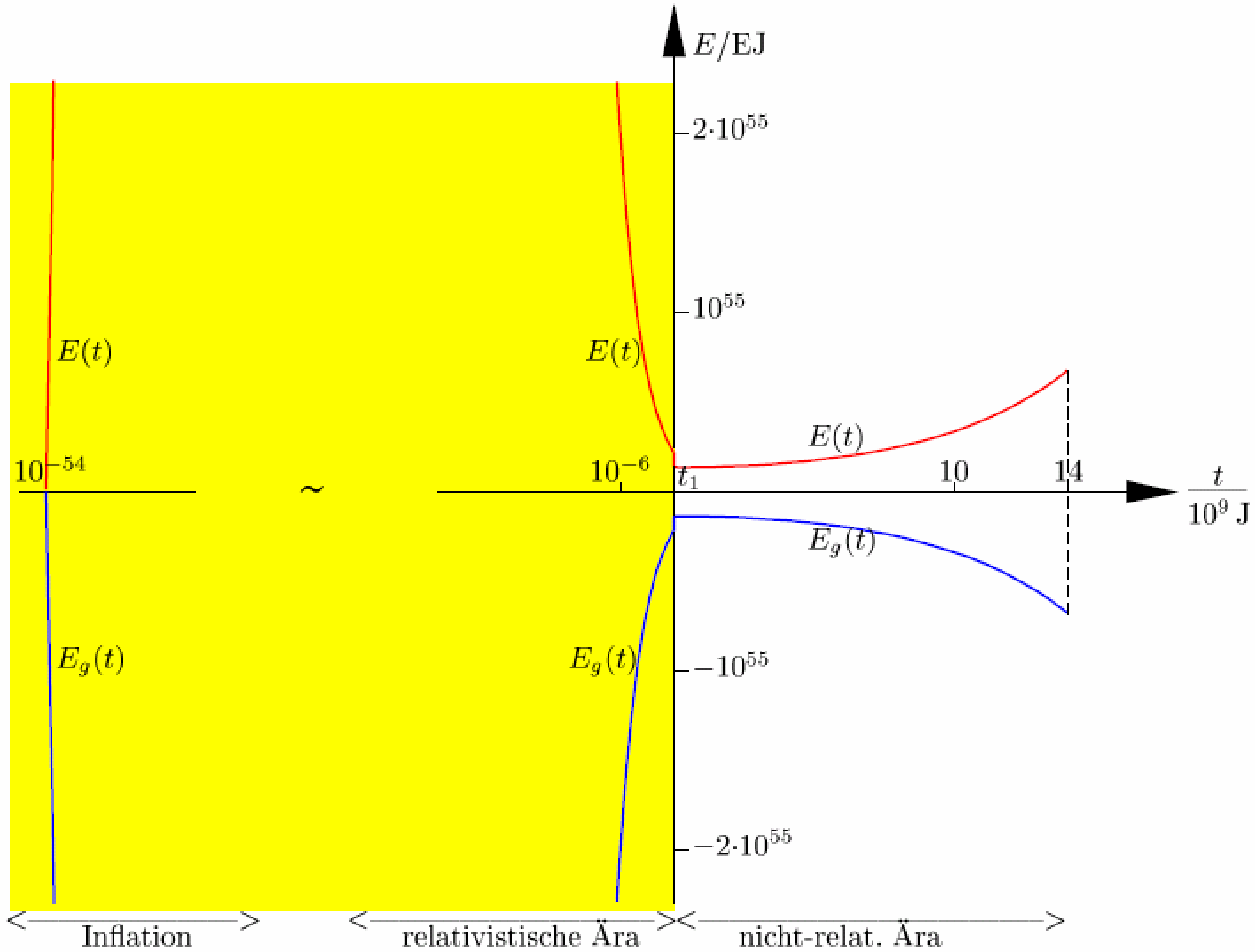


Zeitentwicklung von $\rho_d(t)$, $\rho(t)= \rho_m(t)+ \rho_s(t)$ und $V(t)$. Zwei verschiedene Zeitskalen: links logarithmisch, rechts linear.



Zeitentwicklung der im gegenwärtig sichtbaren Universum enthaltenen globalen Massen bzw. Energien (Ausnahme Gravitationsenergie).

$E_{ms}(t)=E_m(t)+E_s(t)$.



Zeitentwicklung der im gegenwärtig sichtbaren Universum enthaltenen globalen Gesamtmasse bzw. Gesamtenergie $\boldsymbol{E(t) = E_m(t)+E_s(t)+E_d(t)}$ sowie von $\boldsymbol{E_g(t)}$.

7. Grund für Ab- bzw. Zunahme von Energien

Positiver Druck leistet bei Expansion Arbeit : Energieabnahme.

Negativer Druck bewirkt Energiezufuhr: Energiezunahme.

Kein Druck (nicht-relativistische Materie): Energieerhaltung.

Auch für Gravitationsfeld Druck definierbar. Zweite Friedmann-Gleichung:

$$p_m + p_s + p_d + p_g = 0 \qquad \text{mit} \qquad p_g = (2\,\ddot{a}/a - \dot{a}^2/a^2)$$

Inflation: $p_g = -p_d > 0 \quad \Rightarrow \quad E_g$ nimmt zu

Nach Phasenübergang: $p_g = -p_m - p_s < 0 \quad \Rightarrow \quad E_g$ nimmt ab