Luther2008_aWH-ThermischesVerhalten_Lexu.AP2a_FinRep_26p.pdf

Das thermische Verhalten der Außenwandheizung (aWH) (Theoretische Grundlagen)

Arbeitspaket 2a: Geschlossen physikalische Darstellung der thermischen Wandzustände

Abschlussbericht

Projekt LEXU
Förderkennzeichen: 0327370T

Auftraggeber: IZES gGmbH
Altenkesselerstr. 17
66115 Saarbrücken

Auftragnehmer: Dr. rer. nat. Gerhard Luther
e-mail: luther.gerhard@vdi.de
homepage: http://www.uni-saarland.de/fak7/fze/
Telephon: 0681-302-2737 (di) ; 0681-56310 (pr)
dienstlich: **Universität des Saarlandes**
FSt. Zukunftsenergie c/o Technische Physik – Bau E26
66041 Saarbrücken

Nachtrag 2017 AD:
Aktuelle e-mail.: luther.gerhard@ingenieur.de
Themenseite: http://www.fze.uni-saarland.de/ThOptHeizen.htm

Saarbrücken, den 25. Februar 2008

Inhalt:

1. Das thermische Verhalten der Außenwandheizung (aWH)

1.0 Die außenliegende Wandheizung

Ein großer Anteil der Endenergie in Deutschland wird zur Heizung von Gebäuden aufgebraucht. Hierzu werden meist Brennstoffe (Heizöl und Erdgas) eingesetzt, deren Verbrennungswärme am „kalten Ende“ aber nicht vollständig ausgenutzt werden kann, da die Heizkörper nur bis auf eine Rücklauftemperatur ausgekühlt werden, die noch erheblich über der Raumtemperatur liegt. Auch bei einer Solarheizung oder bei geothermischen Heizsystemen muss deshalb auf einen Teil der im Prinzip noch nutzbaren Niedertemperatur (NT) - Wärme verzichtet werden. Die Bereitstellung von Wärmesenken mit möglichst niedriger Rücklauftemperatur ist daher ein Ansatzpunkt, um einen Teil der ansonsten vergeudeten (NT)– Wärme dennoch einer Nutzung zuzuführen.
Einen Schritt in diese Richtung stellt schon der Einsatz von Fußboden- und Wandheizungen dar, - allerdings werden diese Systeme im Wesentlichen nur bei Neubauten eingesetzt. Für die Renovierung von Altbauten wird daher ein NT- Heizsystem mit den folgenden 3 Haupteigenschaften benötigt:

- Möglichst weitgehende Ausnutzung des NT-Wärmeinhaltes der Heizquellen, und zwar sowohl bei den gegenwärtig vorherrschenden fossilen Brennstoffen als auch bei solarer oder geothermischer Zusatzheizung
- geringer Aufwand zur Nachrüstung bestehender Gebäude, und zwar sowohl technisch als auch im Hinblick auf eine Bewohner– freundliche Installation

In dem vorliegenden Forschungsprojekt soll deshalb die außenliegende Wandheizung (aWH)

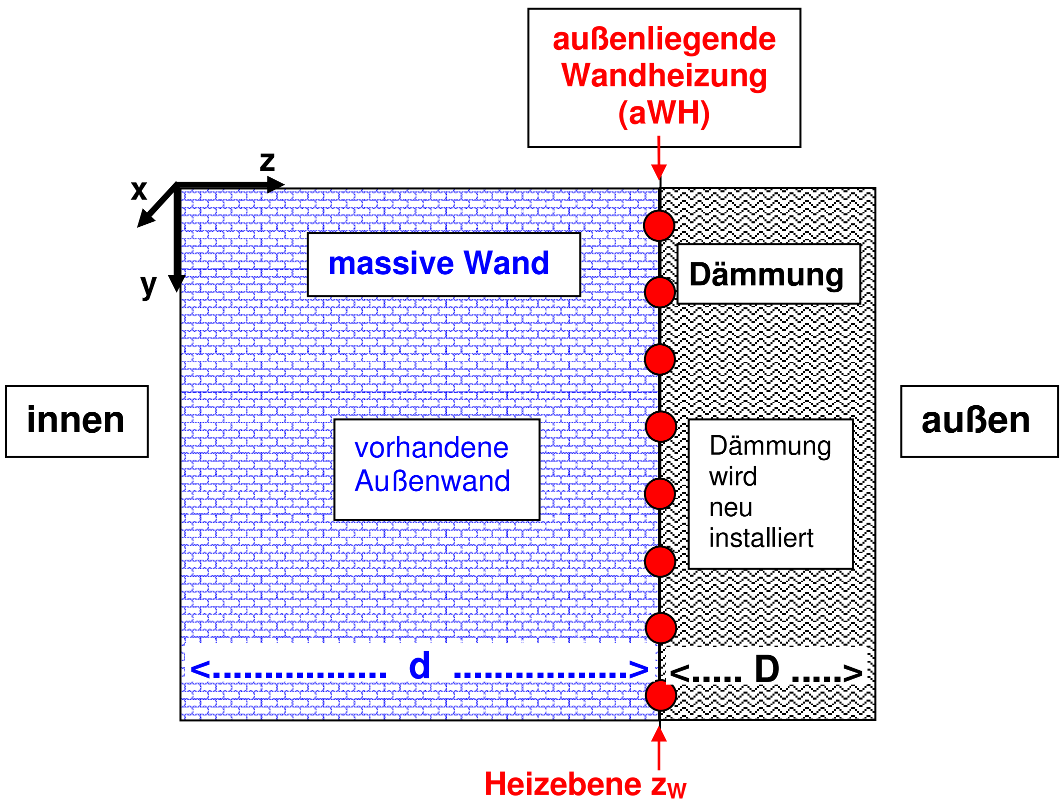

Bild 1: Außenwandheizung mit Wärmeübertragung in einer Heizebene z_W an der Außenseite einer massiven Außenwand der Dicke d mit nachträglicher Außendämmung der Dicke D.

(/Kühnel 2001/, /Glück 2001/, /LA 2002/) theoretisch, experimentell und in praktischer Anwendung eingehend untersucht werden (**Bild 1**). Bei der aWH wird NT-Wärme über ein Heizregister in der Heizebene z_W auf die Außenseite einer massiven Außenwand übertragen, die von einer großzügig bemessenen Außendämmung von der Außenluft isoliert ist. Im Prinzip handelt es sich also um eine Wandheizung an einer bisher ungewöhnlichen Stelle der Außenwand. Zur optimalen Ausnutzung der NT-Wärme sollte die aWH als eigenständiger NT-Heizkreis geführt werden.

Die aWH hat herausragende physikalische, technische und praktische Vorteile:

- Ausnutzung von NT-Wärme mit noch niedrigerer Temperatur als dies bei Flächenheizungen an Innenwänden oder Fußböden möglich ist. Dadurch können z.B. brachliegende NT-Anteile aus dem Abgas von Verbrennungsanlagen oder solarthermische Anlagen durchgängig auch im Winter genutzt werden.
- Durch einen geringen Zusatzaufwand kann die aWH im Verbund mit einer sowieso durchzuführenden außenliegenden Wärmedämmung installiert werden. Nach Abzug der „Sowieso-Kosten“ ist dann der ausschließlich auf die eigentliche aWH entfallende Kostenteil gering. Dies ermöglicht eine großzügige Auslegung durch Abdeckung großer Flächenanteile.
- Die Montage ist mit praktisch keinerlei zusätzlicher Beeinträchtigung der Hausbewohner verbunden, da im Gegensatz zu einer innenliegenden Heizung die Leitungen und Wärmeüberträger nicht im Innern des Hauses verlegt werden müssen.

1.1 Eindimensionales stationäres Modell

Zum physikalischem Verständnis der außenliegenden Wandheizung gehen wir von einem stationären eindimensionalen Modell aus und stellen homogene Wandschichten und Wärmeübergänge als in Serie geschaltete lineare thermische Widerstände dar, die in z-Richtung die Innenseite eines Raumes (mit der Temperatur T_i) mit der Außenluft (Temperatur T_a) verbinden- siehe Bild 2. Der Einfachheit halber betrachten wir ein Wandstück mit der Breite (in y-Richtung) von 1 [m], in dem das Heizmedium in x -Richtung fließt (siehe das Koordinatensystem in **Bild 1)** ; Alle thermischen Widerstände beziehen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf eine Einheits-Wandfläche A= 1 m^2 ; das Flächenelement der Wand in x-Richtung beträgt dann also dA =1*dx.

Der thermische Widerstand der Wand setzt sich zusammen aus

- dem Teilwiderstand R_i’ von der innenliegenden Wandoberfläche bis zur Heizebene z_W und
- dem Teilwiderstand R_a’ von der Heizebene z_W bis zur außenliegenden Wandoberfläche.

Hinzu kommen noch die beiden Übergangswiderstände

- $1/h_i$,von der inneren Wandoberfläche zum Innenraum, und
- $1/h_a$, von der äußeren Wandoberfläche zur Außenluft.

Den gesamten thermischen Widerstand, einschließlich der Übergangswiderstände, von der Heizebene z_w bis zur Innen- bzw. Außenluft bezeichnen wir mit den ungestrichenen Symbolen:

$$R_i = R_i' + 1/h_i \tag{1}$$

und

$$R_a = R_a' + 1/h_a \tag{2}$$

Für den Wärmedurchgangskoeffizienten der Wand, also den sogenannten U-Wert, gilt dann:

$$U = 1 / (R_a + R_i) \tag{3}$$

In **Bild 2** ist der Widerstandsverlauf R(z) einer außengedämmten Wand als Funktion der Dicke dargestellt. Auf der Ordinatenachse sind zur Veranschaulichung die in Serie geschalteten Widerstände {$1/h_i$, R_i' , R_a ',$1/h_a$) aufgezeichnet. Wir benutzen eine Ortskoordinate z, deren Nullpunkt sich auf der inneren Oberfläche der Wand befindet. Wegen des Übergangs-

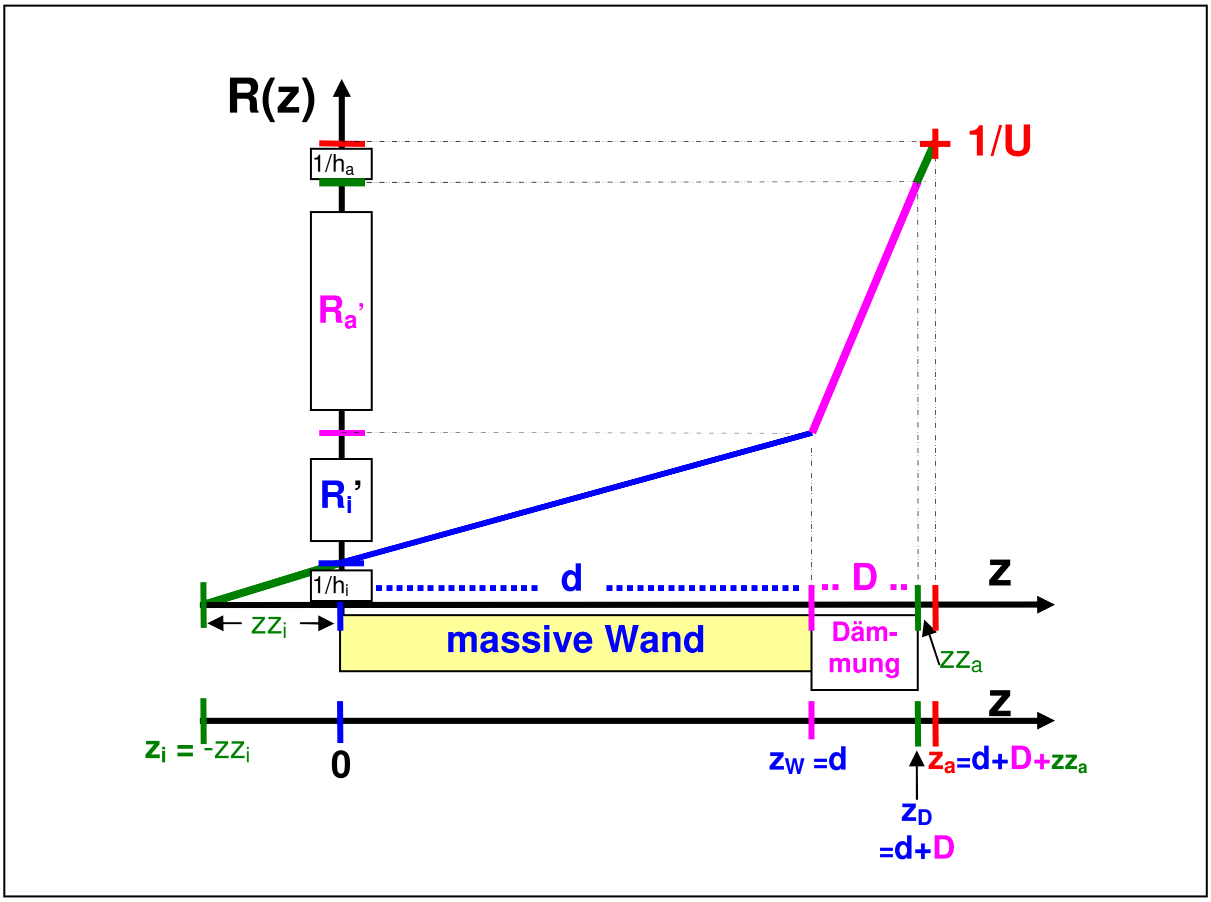

Bild 2: Thermischer Widerstand R(z) einer außengedämmten Wand als Funktion der Ortskoordinate z, die von innen nach außen verläuft. In der Ebene z_W wird die Heizwärme zugeführt.

widerstandes von der Wand in den Innenraum ergibt sich der Nullpunkt R(z) = 0 erst im Innenraum und zwar im Abstand zz_i vor der Wandoberfläche. Dieser Abstand zz_i wird so gewählt, dass der thermische Übergangswiderstand von der Innenraumluft auf die Wand, $1/h_i$, dem thermischen Widerstand einer geeignet gewählten homogenen Vergleichswand mit der gleichen Dicke zz_i entspricht. Analoges gilt für den Abstand zz_a im Außenraum. Diese Abstände $zz_{.i}$ und zz_a dienen nur der Veranschaulichung und geben keine Auskunft über die tatsächliche Dicke der thermischen Grenzschicht zwischen Wand und Umgebungsluft. Sie haben also keine physikalische Bedeutung; daher kann man sie nach lediglich praktischen Gesichtspunkten auswählen. Wir legen Wert auf die mathematische Differenzierbarkeit, also auf eine gleiche Steigung von R(z) an den beiden Oberflächen der Wand. Aufgrund dieser Überlegungen wählen wir als Abstände:

$$zz_i = 1/h_i * d/R_i' \tag{4}$$

und

$$zz_a = 1/h_a * D/R_a' \tag{5}$$

Den Nullpunkt der Ortskoordinate z legen wir normalerweise - wie in **Bild 2** dargestellt – auf die innere Wandoberfläche. Die Ortskoordinate z verläuft von Innen nach Außen. Der Verlauf des Wandwiderstandes R(z) beginnt dann im Innern des Gebäudes bei z = z_i , im Abstand

$-zz_i$ von der inneren Oberfläche der Außenwand. Bei $z= 0$ beginnt die Wand; bei $z = z_W = d$ wird die Heizwärme zugeführt. Die Wand endet bei $z = z_D = d + D$ und bei $z = z_a = d + D + zz_a$ ist der volle Wert des Wandwiderstandes einschließlich der beidseitigen Übergangswiderstände erreicht. Diese Markierungen sind im unteren Abzissenpfeil in Bild 2 zur Veranschaulichung eingezeichnet.
Unsere Auswahl von Richtung und Nullpunkt der Ortskoordinate z sowie der Vergleichabstände zz_i und zz_a für die Übergangswiderstände hat sich zwar in der Praxis bewährt, ist jedoch keineswegs zwingend. Eine andere Auswahl für die Vergleichsabstände der Übergangswiderstände, bei der man allerdings auf die Differenzierbarkeit von R(z) an den Wandoberflächen verzichten müsste, bestünde beispielsweise darin, eine gemeinsame Vergleichswand für beide Abstände zu benutzen. Als solche würde man dann eine Wand mit dem Widerstand (Ra' + Ri') und der Dicke (d+D) wählen, so dass sich ergäbe

$$zz^*_i = 1/h_i * (D+d)/(R_i' + R_a') \tag{6}$$

und

$$zz^*_a = 1/h_a * (D+d)/(R_i' + R_a') \tag{7}$$

Im Folgenden werden wir jedoch bei der erstgenannten Definition (Gl.(4) und Gl.(5)) und den sonstigen im **Bild 2** zugrunde gelegten Festlegungen bleiben.

Da die Ortskoordinate z von Innen nach Außen verläuft, können wir auch der Einfachheit halber den Index i bei $R_i(z)$ weglassen, also:

$$R(z) ..= R_i(z) \qquad \text{für} \quad z >= -zz_i \tag{8}$$

Für den gesamten Widerstand R_i vom Innern des Gebäudes bis zur Heizebene z_W (siehe Gl.(1)) gilt dann:

$$R_i = R(z_W) \tag{9}$$

und für den gesamten Widerstand R_a von der Außenluft des Gebäudes bis zur Heizebene z_W (siehe Gl.(2)) gilt dann unter Benutzung des Gesamtwiderstandes 1/U (siehe Gl.(3)):

$$R_a = 1/U - R(z_W) \tag{10}$$

Bei ausgeschalteter („ruhender“) Wandheizung entspricht die aWH einer einfachen außengedämmten Wand (**Bild 3**). Im thermischen Gleichgewicht nimmt die Temperatur in der Außenwand einen durch den Wandaufbau, genauer gesagt durch R(z), sowie durch die Differenz zwischen Innentemperatur T_i und Außentemperatur T_a bestimmten Verlauf an, den wir als „Ruhetemperatur“ $T_0(z)$ bezeichnen:

$$T_0(z) = T_a + (T_i - T_a) * (1 - R(z) * U) \tag{11}$$

Die Temperaturdifferenz zur Außentemperatur T_a wird also im wesentlichen durch das Verhältnis des lokalen thermischen Widerstandes in Bezug auf einen Bezugspunkt im Innern des Gebäudes bei $z= z_i = -zz_i$, R(z), zum thermischen Gesamtwiderstand der Wand einschließlich der Übergangswiderstände, 1/U, bestimmt.

In **Bild 3** ist übrigens auch deutlich erkennbar, dass die Abstände für die Grenzschichten, zz_i und zz_a, so gewählt sind, dass entsprechend Gl.(4) und Gl.(5) der Widerstandsverlauf R(z) und nach Gl.(11) daher auch der Temperaturverlauf $T_0(z)$ an den Oberflächen der Wand differenzierbar bleibt.

Der zur Ruhetemperatur $T_0(z)$ gehörige (flächenspezifische) „Ruhewärmestrom“ Q_0 ist in jeder Ebene der Wand gleich, da es im Ruhefall ja innerhalb der Wand keine Wärmequellen oder -senken gibt; Q_0 ist also von z unabhängig (**Bild 3**) und ergibt sich zu .

$$Q_0 = U^* (T_i - T_a) \qquad (12)$$

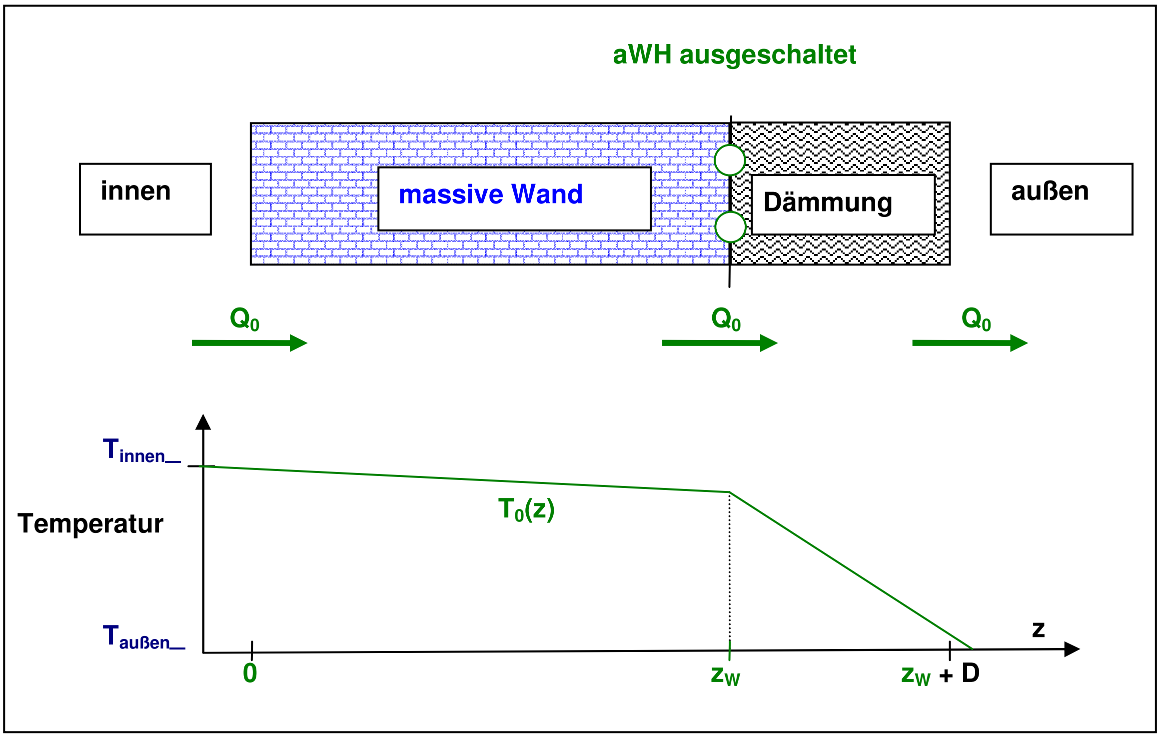

Bild 3: Die „Ruhetemperatur" $T_0(z)$ bei ausgeschalteter aWH wird im thermischen Gleichgewicht vor allem durch den Wandaufbau bestimmt.

Betrachten wir den Abschnitt zwischen Innenraum und Heizebene z_W, so ergibt sich für Q_0 auch:

$$Q_0 = 1/R_i \ (T_i - T_0(z_W)) \qquad (13a)$$

und ebenso im Abschnitt zwischen Heizebene z_W und dem Außenraum

$$Q_0 = 1/R_a \ (T_0(z_W) - T_a) \qquad (13b)$$

Zum Funktionieren der aWH gehört es, dass die Heizebene z_W über ihre Ruhetemperatur $T_0(z_W)$ hinaus temperiert wird (**Bild 4**). Dies wird durch das Heizmedium bewirkt, das in x Richtung entlang der Heizebene z_W durch die Wand fließt. Wir setzen für das Folgende aber voraus. dass der Wärmekapazitätsstrom des zu der Temperierung eingesetzten Wärmeträgers so groß ist, dass der Wärmeträger selbst sich nicht merklich abkühlt; dadurch ergeben sich dann konstante Verhältnisse in seiner Fließrichtung (x-Koordinate). Die zu betrachtenden thermischen Größen hängen also nur von der Tiefe innerhalb der Wand (z-Koordinate) ab - aber nicht von der x-Koordinate . Die Beheizung führt zu einer neuen Temperaturverteilung T(z) innerhalb der gesamten Wand. Die Temperaturerhöhung ΔT_W in der Heizebene z_W beträgt

$$\Delta T_W = T(z_W) - T_0(z_W) \qquad (14)$$

und bewirkt einen Wärmestrom Q_W von der Wandheizung in die Wand. Dieser Wandwärmestrom Q_W fließt zu dem einen Teil als gewünschter Wärmefluss Q_i in das Gebäudeinnere und zu dem anderen Teil als zusätzlicher Wärmeverluststrom Q_a an die Außenluft:

$$Q_W = Q_i + Q_a \qquad , \qquad (15)$$

wobei diese Wärmeströme sich jedoch mit dem Ruhewärmestrom Q_0 überlagern.

Die Gl. (15) lässt sich aus dem Ersatzschaltbild, **Bild 3a** , auch formal herleiten: Aus der *Kirchhoffschen Maschenregel* folgt

$$T_i - T_a = -R_i \; Q_{i\text{-}0} + R_a * Q_{a+0} \qquad (15a)$$

Die Kirchhoffsche Knotenregel ergibt:

$$Q_W = Q_{i\text{-}0} + Q_{a+0} \qquad (15b)$$

Hierbei sind $Q_{i\text{-}0}$ und Q_{a+0} die resultierenden tatsächlich Ströme, die zwischen der Einspeiseebene z_W und dem Innenraum bzw. dem Außenraum fließen.

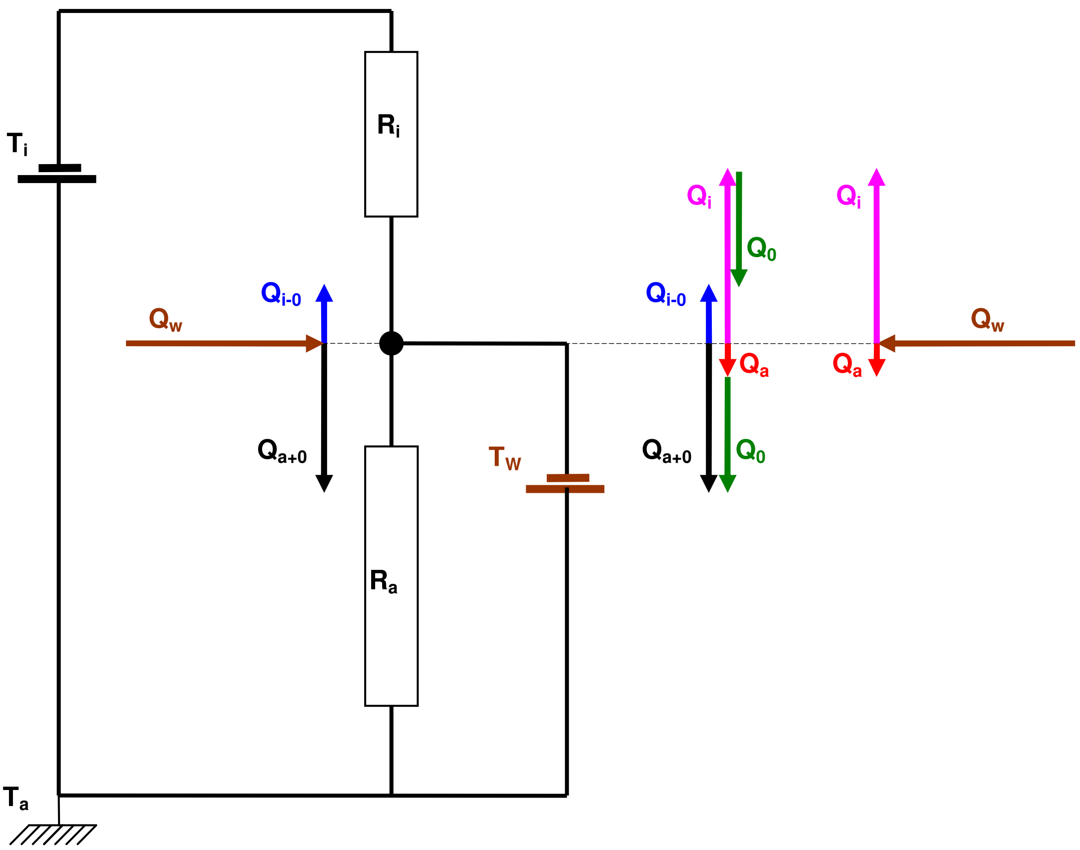

Bild 3a: Ersatzschaltbild für die aWH mit Veranschaulichung (linke Hälfte) der Überlagerung des Wandheizungsstromes Q_W mit dem Ruhestrom Q_0

Man beachte die in **Bild 3a** eingezeichneten Zählpfeile, die angeben in welcher Richtung die Ströme positiv gezählt werden. Der Ruhestrom Q_0 fließt von innen nach außen. Um zu den alleine durch die Wandheizung zusätzlich verursachten Strömen Q_i (nach innen) und Q_a (nach außen) zu gelangen, müssen wir Q_0 zu $Q_{i\text{-}0}$ hinzuzählen und von Q_{a+0} abziehen; dies wird im rechten Teil von Bild 3a veranschaulicht. Daher definieren wir:

$$Q_i = Q_{i\text{-}0} + Q_0 \qquad (15c)$$
$$Q_a = Q_{a+0} - Q_0 \qquad (15d)$$

Nun setzen wir die Gl.(15c) und Gl.(15d) in Gl.(15b) ein und erhalten direkt Gl.(15); der zu- und abfließende Ruhestrom Q_0 hebt sich also in der Bilanz als „Durchlaufposten" gerade wieder heraus.

Insgesamt lassen sich aufgrund der Temperaturdifferenzen und der thermischen Widerstände zwischen der Heizebene z_W und der Innenluft bzw. der Außenluft gemäß der Analogie zum *Ohmschen Gesetz* die beiden folgenden Beziehungen angeben (siehe **Bild 4**):

$$T(z_W) - T_i = R_i * (Q_i - Q_0) \qquad (16)$$

bzw.

$$T(z_W) - T_a = R_a * (Q_a + Q_0) \qquad (17)$$

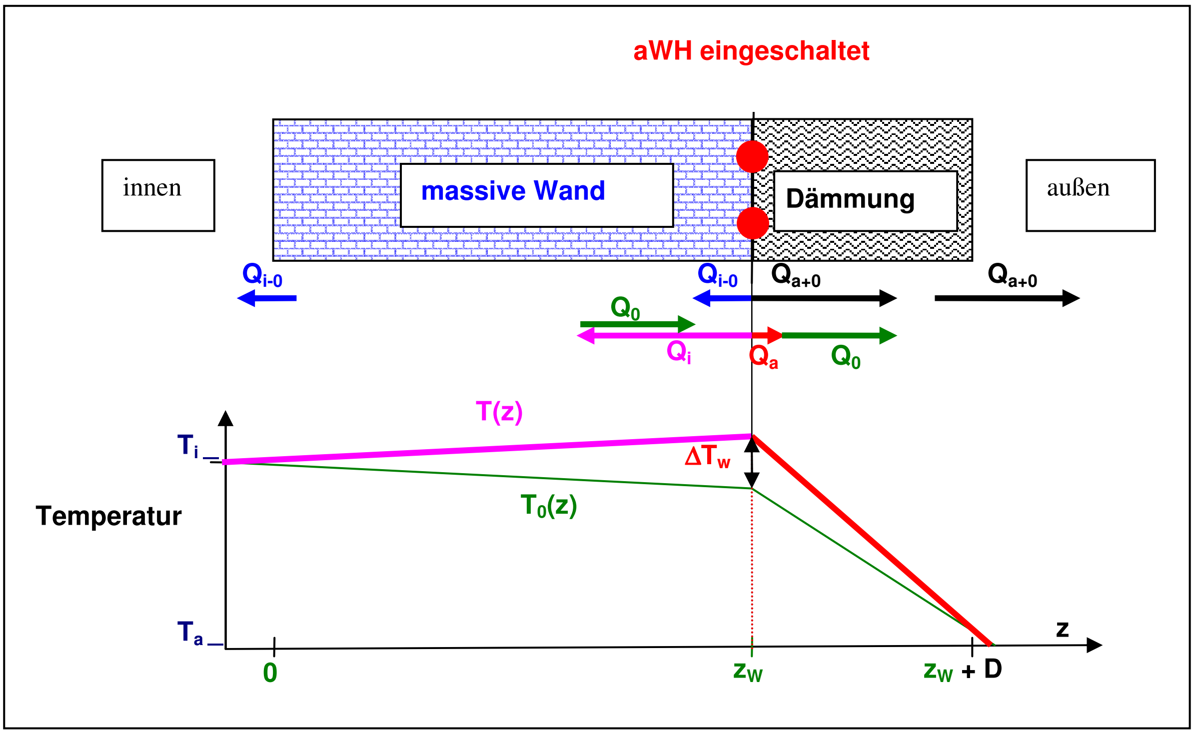

Bild 4: Temperaturverlauf und Wärmeströme bei eingeschalteter aWH:

Die Richtungspfeile der Wärmeströme sind so gewählt sind, dass die Wärmeströme von der Heizebene z_W weg nach innen oder nach außen immer als positiv gezählt werden. In **Bild 4** wurde gemäß Gl. (15) $(Q_i - Q_0)$ als $Q_{i\text{-}0}$ und $(Q_a + Q_0)$ als Q_{a+0} bezeichnet.
Nun addieren und subtrahieren wir $T_0(z_W)$ auf den linken Seiten von (16) und (17) :

$$(T(z_W) - T_0(z_W)) - (T_i - T_0(z_W)) = R_i * (Q_i - Q_0) \qquad (18)$$

und

$$(T(z_W) - T_0(z_W)) - (T_a - T_0(z_W)) = R_a * (Q_a + Q_0) \qquad (19)$$

Wir ersetzen $R_i * Q_0$ in Gl.(18) durch Gl.(13a) und $R_a * Q_0$ in Gl.(19) durch Gl.(13b), so dass sich die zweiten Summanden auf beiden Seiten wegheben, und erhalten unter Verwendung von ΔT_W als Abkürzung gemäß der Gl.(14):

$$\Delta T_W = R_i * Q_i \tag{20}$$

und

$$\Delta T_W = R_a * Q_a \tag{21}$$

Aus dem Vergleich von Gl.(20) und (21) ergibt sich:

$$Q_i / Q_a = R_a / R_i \tag{22}$$

Das Verhältnis des nach innen fließenden Nutzwärmetromes Q_i zum gesamten Heizstrom der Wandheizung Q_W kann als *Wirkungsgrad der Wandheizung* aufgefasst werden:

$$\eta = Q_i / Q_W = Q_i / (Q_i + Q_a) \tag{23}$$

Dividiert man in (23) Zähler und Nenner durch Q_i, setzt Gl.(22) ein und beachtet Gl.(3) so ergibt sich

$$\eta = Q_i / (Q_i + Q_a) = 1/(1 + Q_a/Q_i) = 1/(1 + R_i/R_a) = R_a/(R_a + R_i) = R_a * U$$

also:

$$\boxed{\eta = R_a * U} \tag{24}$$

Der Anteil η der Wärmegewinne Q_i an der gesamten Heizwärme Q_W ergibt sich also aus dem Verhältnis des thermischen Widerstandes R_a von der Heizebene z_W zur Außenluft zu 1/U, dem gesamten thermischen Widerstand der Wand einschließlich der Wärmedämmung und der Übergangswiderstände.
Je besser die Wärmedämmung R_a um so mehr strebt η gegen 1; in der Praxis kann man mit η = 0,8 bis 0,9 und besser rechnen. Diese Wärmeverluste sind unvermeidbar und ergeben sich daraus, dass hier die Heizwärme in einer Ebene eingespeist wird, deren Ruhetemperatur $T_0(z_W)$ unterhalb der Zimmertemperatur T_i liegt: Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik kann man eben nur mit einer zusätzlichen Entropieerzeugung Wärme auf ein höheres Temperaturniveau pumpen. Dieser unvermeidbare Wärmeverlust fällt jedoch gar nicht ins Gewicht, da die aWH ja sowieso als eigenständiger NT - Heizkreis nur aus Wärmequellen gespeist werden soll, die wegen ihrer niedrigen Temperatur ansonsten ungenutzt blieben.

Unter Benutzung von Gl.(3) kann man R_a durch $(1/U – R_i)$ ersetzen und erhält aus Gl.(24):

$$\eta = 1 - R_i * U \tag{24a}$$

Aus (24a) folgt durch Umstellung der Anteil des Wärmeverlustes Q_a an der gesamten Heizwärme Q_W:

$$\boxed{(1 - \eta) = R_i * U} \tag{25}$$

Da der Wirkungsgrad η eine besonders wichtige Kenngröße der aWH ist, wollen wir die Temperaturerhöhung ΔT_W in der Heizebene z_W mit η in Beziehung setzen. Ersetzen wir R_i in Gl.(20) durch Gl.(25) so ergibt sich:

$$\Delta T_W = R_i * Q_i = R_i * \eta * Q_W = (1 - \eta) * \eta * Q_W / U$$

also:

$$\boxed{\Delta T_W = (1 - \eta) * \eta * Q_W / U} \tag{26}$$

Wir weisen ausdrücklich daraufhin, dass unsere Überlegungen völlig unabhängig von der besonderen Wahl der Ebene $z = z_W$ sind. Sie sind für jede isotherme Ebene innerhalb einer

Außenwandkonstruktion gültig. Zu jeder isothermen Ebene lassen sich nämlich "Gesamtwiderstände" nach außen, R_a , und nach innen, R_i , gemäß Gl.(1) und Gl.(2) definieren. Die Ebene z_W kann beispielsweise auch die innere Wandoberfläche oder eine beliebige isotherme Ebene in einer beliebigen Wandschicht darstellen oder in irgendeiner Grenzschicht zwischen zwei Schichten liegen. Der äußere Rand der massiven Außenwand als Quellebene $z = z_W$ für die Zuführung der Heizwärme ist im Sinne der obigen Betrachtungen nur als Veranschaulichung gewählt worden.

Die obigen Ergebnisse wurde bereits in (/LA 2002/) hergeleitet. Allerdings haben wir uns nun eine kleine Vereinfachung der Schreibweise erlaubt: Für R_a wurde in [LA-2002] zwar deutlich aber doch etwas umständlich „$R_{a,gesamt}$“ geschrieben, und die thermischen Wandwiderstände bezeichnen wir nun mit R_a‘ bzw. mit R_i‘ und nicht mehr mit „R_a “ bzw. „R_i “ wie in [LA-2002].

Die Beschreibung der aWH mit reduzierten Größen

Um eine einfachere Schreibweise zu erlangen, gehen wir zu dimensionslosen „reduzierten" Größen über, d.h. wir beziehen die wichtigsten Variablen auf geeignete Bezugswerte und zwar auf:

die Außentemperatur T_a und die Temperaturdifferenz zwischen innen und außen:($T_i - T_a$)
den thermischen Gesamtwiderstand der Wand: 1/U
den Ruhewärmestrom Q_0

Weiterhin gehen wir in der Regel , wie bereits vorher festgelegt, von einer Querschnittsfläche von A= 1 m^2 aus, d.h. wir arbeiten mit flächenspezifischen extensiven Größen (Wandströme, Widerstände) ohne dies andauernd zu wiederholen..
Die reduzierten Größen bezeichnen wir in der Regel mit den entsprechenden kleinen Buchstaben der Namen der Variablen .

Wir definieren daher:
den **reduzierten thermischen Widerstand** einer Ebene mit der Ortskoordinate z :

$$r(z) = R(z) * U \tag{27}$$

eine **reduzierte Temperatur**:

$$t = (T - T_a) / (T_i - T_a) \tag{28}$$

und einen **reduzierten Wärmestrom**

$$q = Q/Q_0 \tag{29}$$

Nun werden die wichtigsten Zusammenhänge mit reduzierten Größen ausgedrückt.

Aus Gl.(11)

$$T_0(z) = T_a + (T_i - T_a) * (1 - R(z) * U) \qquad [(11)]$$

folgt durch Umordnung und Einsetzen von (27)

$$(T_0(z) - T_a) / (T_i - T_a) = 1 - R(z) * U = 1 - r(z)$$

Also lässt sich die reduzierte Ruhetemperatur $t_0(z)$, definiert durch

$$t_0(z)..= (T_0(z) - T_a) / (T_i - T_a) \quad , \tag{30}$$

direkt durch den in Gl.(27) definierten reduzierten thermischen Widerstand der Wand, r(z), ausdrücken:

$$\boxed{t_0(z) = 1 - r(z)} \tag{31}$$

Im Innern des Gebäudes, aber jenseits der Übergangszone, also für $z \leq z_i = -zz_i$, gilt dann

$$t_i = t_0(z \leq z_i) = 1 \tag{32}$$

und für den Außenbereich jenseits der Übergangszone, also für $z \geq z_a = d+D + zz_a$, gilt

$$t_a = t_0(z \geq z_a) = 0 \tag{33}.$$

Auch der Wirkungsgrad η gemäß Gl.(24) bzw. (Gl.(24a)

$\eta = R_a * U$ [(24)] bzw. $\eta = 1 - R_i * U$ [(24a)]

lässt sich mittels der Normierung $r_a = R_a * U$ bzw. $r_i = R_i * U$ sehr einfach ausdrücken:

$$\eta = r_a = 1 - r_i \tag{34}$$

Wie bereits vorher festgestellt sind die Überlegungen völlig unabhängig von der speziellen Bedeutung der Ebene $z = z_W$. Die Gl.(34) lässt sich daher für die Anbringung einer Wandheizung an jeder beliebigen Stelle z der Wand verallgemeinern. Deren Wirkungsgrad $\eta(z)$ lässt sich dann durch r(z) , den reduzierten Wandwiderstand zwischen dem Innenbereich und der Ebene z in der Wand, ganz allgemein ausdrücken:

$$\boxed{\eta(z) = 1 - r(z)} \tag{35}$$

Mit Gl.(31) kann man dann auch schreiben:

$$\boxed{\eta(z) = t_0(z)} \tag{36}$$

Der Wirkungsgrad einer Wandheizung in einer beliebigen isothermen Ebene z innerhalb der Wand entspricht also der reduzierten Ruhetemperatur an dieser Stelle.

Die durch den reduzierten Wandwärmestrom

$$q_W = Q_W / Q_0 \tag{37}$$

ausgelöste reduzierte Temperaturerhöhung Δt_W in der Heizebene $z = z_W$,

$$\Delta t_W = t(z_W) - t_0(z_W) = \Delta T_W / (T_i - T_a) \tag{38}$$

lässt sich aus (26)

$$\Delta T_W = (1 - \eta) * \eta * Q_W / U \qquad [(26)]$$

gewinnen, indem man zunächst mit Q_0 erweitert und dann für Q_0 die Gl.(12)

$$Q_0 / U = (T_i - T_a) \qquad [(12)]$$

einsetzt:

$$\Delta T_W = (1 - \eta) * \eta * Q_W / U = (1 - \eta) * \eta * Q_W / Q_0 * Q_0 / U =$$
$$= (1 - \eta) * \eta * q_W * (T_i - T_a)$$

$$\Delta t_W = \Delta T_W / (T_i - T_a) = (1 - \eta) * \eta * q_W$$

Dann ergibt sich:

$$\Delta t_W = (1 - \eta) * \eta * q_W \tag{39}$$

Mit (35) kann man die reduzierte Temperaturerhöhung in der Heizebene z auch direkt als Funktion von r(z) schreiben:

$$\boxed{\Delta t_W = r(z) * (1 - r(z)) * q_W} \tag{40}$$

Zusammenfassende Beschreibung

Wir beschreiben eine in der x-y-Ebene homogene Wand mit einem beliebigen Schichtaufbau in der dazu senkrechten z-Richtung, bei der in der Ebene $z=z_W$ eine Wandheizung mit idealer Ankoppelung (d.h. mit verschwindendem Übergangswiderstand zwischen Heizmedium und Wand) angebracht ist und bei der die Ebene z=0 im Innern des Gebäudes liegt, durch ein eindimensionales stationäres lineares Widerstandsmodell. Hierzu benötigen wir die folgenden Parameter:

R(z) = Wandwiderstand, thermischer Widerstand zwischen der Ebene z und dem Gebäudeinnern jenseits der Übergangszone $z= -zz_i$.

T_i-T_a = Temperaturdifferenz zwischen innen und außen

T_a = Außentemperatur

Q_W = Heizstrom, der in der Wandebene z_W zugeführt wird

Aus Gründen der einfacheren Bezeichnung beziehen wir in der Regel alle extensiven Größen o.B.d.A. auf eine Einheits-Wandfläche $A = 1m^2$, und sprechen dort, wo keine Verwechslung möglich ist, auch von Strömen statt Stromdichten und thermischen Leitwerten statt thermischen Flächenleitwerten, deren Reziprokwerte wir verkürzt auch thermische Widerstände nennen.

Für den gesamten Widerstand der Wand zwischen den Lagen z_a , in der die Außentemperatur T_a erreicht ist , und $z_i = -zz_i$, in der die Innentemperatur T_i erreicht ist, benutzen wir auch die Bezeichnung :

$$1/ U = R(z_a)$$

Für den Ruhestrom Q_0 , der bei $Q_W = 0$ alleine aufgrund des Temperaturgefälles zwischen Innen und Außen , fließt gilt:

$$Q_0 = U^* (T_i - T_a) \qquad [(12)]$$

Zur weiteren Beschreibung benutzen wir reduzierte Variable, in dem wir
die Wärmeströme in der Wand auf Qo
die Widerstände auf 1/U und
die Temperaturen auf T_a und die Temperaturdifferenzen auf (T_i -T_a)
beziehen. Dies ergibt:

den **reduzierten Wandwiderstand**

$$r(z) = R(z) {}^*U \qquad [(27)]$$

eine **reduzierte Temperatur**:

$$t = (T - T_a) / (T_i - T_a) \qquad [(28)]$$

und einen **reduzierten Wärmestrom**

$$q = Q/Q_0 \qquad [(29)]$$

Mit diesen reduzierten Variablen erhält man die Grundgleichungen der aWH, wobei als unabhängige Variable nur der Widerstandsverlauf r(z) und der Wandheizstrom q_W vorgegeben werden:

die reduzierte (red.) **Ruhetemperatur** in der Wand,	$t_0(z) = 1 - r(z)$	[(31)]
die red. **Temperaturerhöhung der Heizebene** $z= z_W$:	$\Delta t_W = r(z) (1 - r(z)) * q_W$	[(40)]
und den **Wirkungsgrad** einer Wandheizung in $z= z_W$:	$\eta(z) = (1 - r(z))$	[(35)]

1.2 Übersicht über Wärmeströme, Temperaturen und Kenngrößen

Wir beziehen nun das Heizmedium (Index H) in unsere Betrachtungen ein.
Zur Beschreibung der thermischen Verhältnisse in der beheizten Außenwand liegt es nahe, die folgenden Wärmeströme heranzuziehen:

Q_0 = „Ruhewandstrom" = der Wärmestrom, der über die Wandfläche A, die wir aus Bequemlichkeit in der Regel gleich 1 m² setzen, im Gleichgewicht zwischen der Innentemperatur T_i und der Außentemperatur T_a bei Ausschaltung der Außenwandheizung fließt. Wegen des häufigen Vorkommens kürzen wir immer „innen" mit „i" und „außen" mit „a" ab. Im thermischen Gleichgewicht ist der Ruhestrom Q_0 der Temperaturdifferenz und dem Wärmedurchgangskoeffizient U proportional, also:

$$Q_0 = A * U^* (T_i - T_a) \tag{101}$$

QH_{ein} = eingespeister Heizstrom, der in die Wandheizung eingespeiste Wärmestrom, wobei als Bezugspunkt die Außentemperatur T_a herangezogen wird.

QH_{aus} = ausgetragener Heizstrom, der die Außenwand verlassende Wärmestrom des Heizmediums, wobei als Bezugspunkt die Außentemperatur T_a genommen wird.

Q_W = Wandstrom , der von der Außenwandheizung insgesamt an die Wand übertragene Wärmestrom. Er ergibt sich als die Differenz zwischen eingespeistem und ausgetragenem Heizstrom.

$$Q_W = QH_{ein} - QH_{aus}. \tag{102}$$

Der Wandstrom Q_W spaltet sich auf in den nach innen fließenden Nutzwärmestrom Q_i und den nach außen zusätzlich zum Ruhewandstrom Q_0 abfließenden Wärmestrom Q_a.

$$Q_W = Q_i + Q_a \tag{102a}$$

Der Wärmestrom Q_i ist derjenige Anteil von Q_W, der zur Beheizung des Hauses dient. Also:

Q_i = Nutzwärmestrom, nutzbarer Teil des Wandwärmestromes Q_W, der zur Beheizung des Hauses dient und einen gleich großen, im Inneren des Hauses übertragenen Wärmestrom vollständig ersetzt.

Q_a = Verlust Wärmestrom, der Teil des Wandstromes Q_W, der zusätzlich zum Ruhewandstrom Q_0 nach außen abfließt und als Verlustwärmestrom gewertet werden muss.

Temperaturen:

Die oben angegebenen Wärmeströme müssen im Zusammenhang mit den entsprechenden Temperaturen gesehen werden. Hierbei sind, neben der Innen- und Außentemperatur, die Ein- und Ausgangstemperatur des Heizmittels und die Temperatur der Temperierungsebene im „Ruhezustand" von Bedeutung. Wir betrachten daher die **folgenden Temperaturen**:

TH_{ein} = Eintrittstemperatur des Heizmittels in die Außenwand

TH_{aus} = Austrittstemperatur des Heizmittels beim Verlassen der Außenwand.

$T_0(n)$ = Ruhetemperatur in der Temperierungsebene n; das ist diejenige Temperatur, die die Temperierungsebene n annehmen würde, wenn kein Wandheizstrom Q_W fließen würde.

Kenngrößen:

Die oben genannten extensiven Größen (Wärmeströme) müssen zur Herausbildung allgemein gültiger Aussagen in geeigneter Weise normiert werden. Hierbei hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die folgenden Definitionen zu benutzen:

(Energetischer) Wirkungsgrad η :

$$\eta = Q_i/Q_W = \text{Nutzwärme/ abgegebene Wärme} \qquad (103)$$

Deckungsgrad β:

$$\beta = Q_i/Q_0 = \text{Nutzwärme/Ruhewärme} \qquad (104)$$

Benutzungsfaktor τ:

$$\tau = (TH_{ein} – TH_{aus}) / (TH_{ein} – T_a) \qquad (105)$$

Der Benutzungsfaktor ist in Gleichung (105) als bezogene Temperaturänderung des Heizmittels definiert worden. Durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit dem Produkt aus Massestrom und spezifischer Wärmekapazität des Heizmittels kann die Aussage in gleicher Form auch für die ein- und ausgetragenen Heizwärmeströme erfolgen.

$$\tau = (QH_{ein} – QH_{aus}) / QH_{ein} \qquad (106)$$

Aus diesen Basisgrößen, η, β und τ, manchmal auch τ $ genannt, lässt sich als weiterer wichtiger Faktor der Erntegrad € (=„Euro“) ableiten.

Erntegrad:

$$€ = Q_i / QH_{ein} = Q_i / Q_W \cdot Q_w / QH_{ein} = \eta \cdot \tau \qquad (107)$$

$$€ = \text{Nutzwärme/ eingespeiste Wärme}$$

Der Erntegrad € gibt also den Anteil der Nutzwärme an der angebotenen Wärme an. Der Erntegrad € ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn das ausfließende Heizwasser QH_{aus} nicht mehr weiterverwendet werden kann, also wenn der Abfluss des Heizwasserstroms nicht mehr zur Wiederaufheizung oder sonstiger Nutzung weiterverwendet werden kann. Dieser Fall kann beispielsweise bei direkter Nutzung von geothermischer Energie oder von Abwasserströmen auftreten.

1.3 Ortsabhängiger Wandwärmestrom

Im Folgenden betrachten wir eine Wand (**Bild 5)**, deren Dicke durch die z-Koordinate beschrieben wird. Auf der Breitseite (y-Koordinate) wird als Heizung ein Wärmeträgerfluid eingespeist , das in der Ebene $z = z_W$ = const breitflächig in der x - Richtung innerhalb der Wand geführt wird. Wir setzen eine perfekte Ankopplung des Fluids an die umgebende Wand voraus, so dass die Temperatur des Fluids identisch mit der Wandtemperatur an der Einspeisestelle ist. Weiterhin betrachten wir oBdA eine homogene Breitseite (y-Koordinate) von 1m.

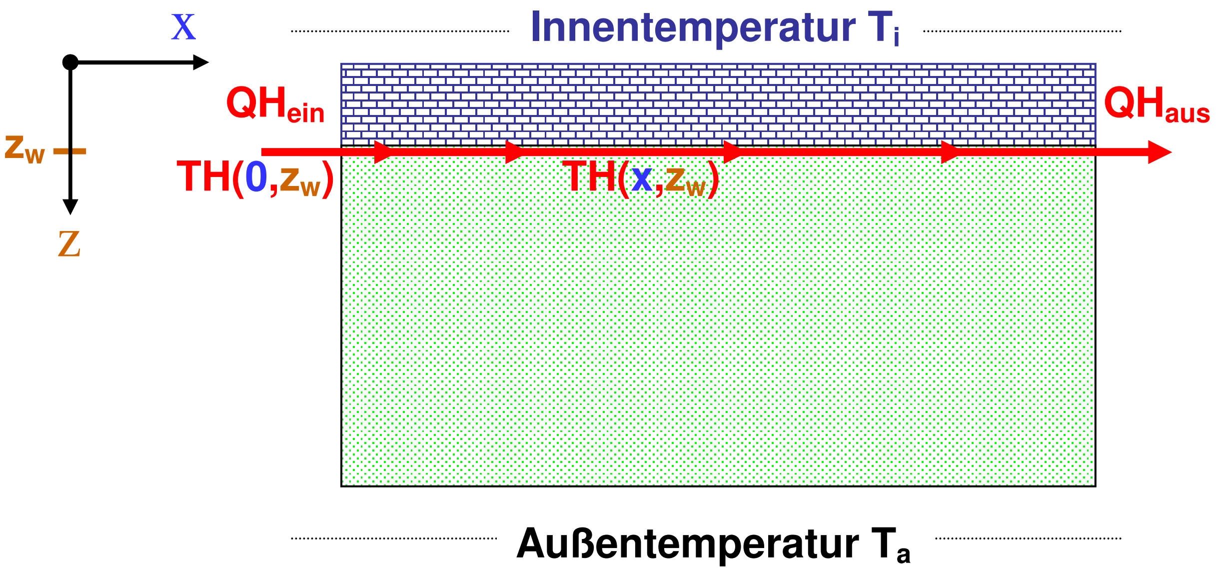

Bild 5 : Zum Temperaturverlauf des in x-Richtung fließenden Heizmediums im thermischen Gleichgewicht.

Nun untersuchen wir, wie sich die Temperatur des Wärmeträgers durch die Beheizung der Wand verändert und beschränken uns auf den thermischen Gleichgewichtszustand.
Der Wärmestrom dQ^*_W, der von dieser Wandheizung in einem Flächenelement der Breite (y-Koordinate) 1m und der Länge dx an die Wand abgegeben wird, beträgt dann

$$dQ^*_W = Q_w(x, z_W)\, dx \tag{41}$$

wobei $Q_w(x, z_W)$ die Flächen bezogenen Wandwärmestromdichte bedeutet, die jedoch – bei fester Breitseite (y-Koordinate) von 1m- in x-Richtung auch als längenbezogene Wandwärmestromdichte der Wandheizung aufgefasst werden kann. Gehen wir gemäß Gl.(29) durch Normierung auf den Ruhewärmestrom Q_0, also auf den Wärmestrom der durch 1 m² Wand bei ausgeschalteter Wandheizung fließt, zu den reduzierten Größen über so erhalten wir:

$$dq^*_W = q_w(x, z_W)\, dx \tag{42}$$

Wir bemerken, dass bei homogenen Wänden der nach Gl.(27) definierte reduzierte thermische Widerstand r(z) nicht von der betrachteten Fläche abhängt, da der Flächenbezug der beiden Faktoren R(z) und U sich in ihrem Produkt gerade heraushebt. Daher hängt r(z) also weder von x noch von der Länge dx des betrachteten Flächenelementes ab. Den Zusammenhang zwischen der lokalen (Längskoordinate x) Übertemperatur der Heizebene in der

Tiefe z_W innerhalb der Wand lässt sich dann in der Schreibweise mit reduzierten Größen der Gl.(40) entnehmen.

$$\Delta t_W(x, z_W) = r(z_W) (1 - r(z_W)) * q_W(x, z_W)$$

wodurch sich für $q_W(x, z_W)$ ergibt:

$$dq^*_W(x) = q_W(x, z_W)\, dx = \Delta t_W(x, z_W) / [r(z_W) (1 - r(z_W))] * dx \qquad (43)$$

Wärmeabgabe des Fluids

Wir betrachten die Wärmebilanz eines Elementes der Länge dx der Wandheizung. Der Wärmeinhalt des einströmenden Heizungswasser $q_H(x)$ verringert sich dabei um die an die Wand abgegebene Wärme:

$$\begin{aligned} dq^*_W(x) &= - (q_H(x+dx) - q_H(x)) \\ &= - m * c_p / Q_0 * (\Delta t_W(x+dx, z_W) - \Delta t_W(x, z_W)) \\ &= - m * c_p / Q_0 * d\Delta t_W(x, z_W) \end{aligned}$$

wobei wir davon Gebrauch machen, dass gemäß Voraussetzung z_W keine Funktion von x ist .

Mit (43) ergibt sich nun.

$$\Delta t_W(x, z_W) / [r(z_W) (1 - r(z_W))] * dx = - m * c_p / Q_0 * d\Delta t_W(x, z_W)$$

Durch Umordnen ergibt sich die Differentialgleichung:

$$d\Delta t_W(x, z_W)/ dx * 1 / \Delta t_W(x, z_W) = - Q_0 / [r(z_W) (1 - r(z_W))] * 1/(m\ c_p) \qquad (44)$$

Auf der linken Seite der Gl. (44) steht die Ableitung von $\ln(\Delta t_W(x, z_W))$ nach x, also

$$d \ln(\Delta t_W(x , z_W))/ dx$$

Integration auf beiden Seiten der Gl.(44) ergibt dann mit der Integrationskonstanten C :

$$\ln(\Delta t_W(x, z_W)) = - Q_0 / [r(z_W) (1 - r(z_W))] * 1/(m\ c_p) + C$$

und durch Anwendung der Exponentialfunktion :

$$\Delta t_W(x, z) = \exp\{C \} * \exp\{ - x * Q_0 / [r(z_W) (1 - r(z_W))] * 1/(m\ c_p)\} \qquad (45)$$

Für x= 0 ergibt sich

$$\Delta t_W(0) = \exp\{C \} * 1$$

Somit kann man die Gl.(45) angeben zu :

$$\Delta t_W(x) = \Delta t_W(0) * \exp \{ - x * Q_0 / (m\ c_p) * 1/ [r(z_W) (1 - r(z_W))] \} \qquad (46)$$

Nun setzen wir noch den Ruhestrom Q_0

$$Q_0 = U *(T_i - T_a)$$

ein und erhalten

$$\boxed{\Delta t_W(x) = \Delta t_W(0) * \exp\left\{ - x * [U *(T_i - T_a) / (m\ c_p)] * 1/ [r(z_W) (1 - r(z_W))] \right\}} \qquad (47)$$

Bemerkungen

1. In Gl.(47) stellt der letzte Faktor innerhalb der Exponentialfunktion den reduzierten Gesamtleitwert y* für 1 m² Fläche von der Heizebene z_W aus gesehen dar. Dieses y* ergibt sich aus der Parallelschaltung der beide Leitwerte von der Heizebene $z = z_W$ aus nach innen bzw. nach außen.:

$$y^*(z) = y_i(z) + y_a(z)$$

$$= 1/r(z) + 1/(1-r(z))$$

$$= [(1-r(z) + r(z)] / [r(z) (1 - r(z))]$$

$$y^*(z) = 1 / [r(z) (1 - r(z))] \qquad (48)$$

2. Vor dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts hängt die Übertemperatur Δt_W natürlich noch von der Zeit t ab:

$$\Delta t_W = \Delta t_W(x, z, t)$$

Befindet sich die Wand vor Einschaltung der Wandheizung auf Ruhetemperatur $T_0(z)$, so ist der Wärmestrom in die Wand zu Beginn der Beheizung und am Anfang der Heizstrecke wg. des zunächst höheren Temperaturgefälles zunächst höher als im Gleichgewicht. Dadurch kühlt das Heizmedium in x-Richtung jedoch stärker ab, so dass sich die Übertemperatur Δt_W mit der Zeit von unten her asymptotisch an die Gleichgewichtskurve annähert:

$$\Delta t_W(x, z, t) < \Delta t_W(x, z) \qquad \text{für } x > 0$$

und mit

$$\Delta t_W(0, z, t) = \Delta t_W(0, z) \qquad \text{für } x = 0$$

1.4 Diagonale Außenwandheizung

In diesem Abschnitt betrachten wir die exergetisch optimale Form der Außenwandheizung und untersuchen die Frage, welcher Erntegrad € maximal aus einem Heizmedium herausgeholt werden kann. Diese theoretischen Überlegungen geben uns einen Maßstab für die in der Praxis erzielten Werte.

Wir betrachten dazu eine Heizebene, die in x-Richtung diagonal durch eine Wand verläuft **(Bild 6)** ; die Wand trennt in z-Richtung (= „Dicke") die Innenseite eines Raumes mit der Temperatur T_i von der Außenwelt mit der Temperatur T_a . In y Richtung ergeben sich keine Änderungen und wir betrachten der Einfachheit halber ein Wandstück mit der Breite (in y-Richtung) von 1 [m]. Das Flächenelement der Wand in x-Richtung beträgt dann also dA =1*dx.

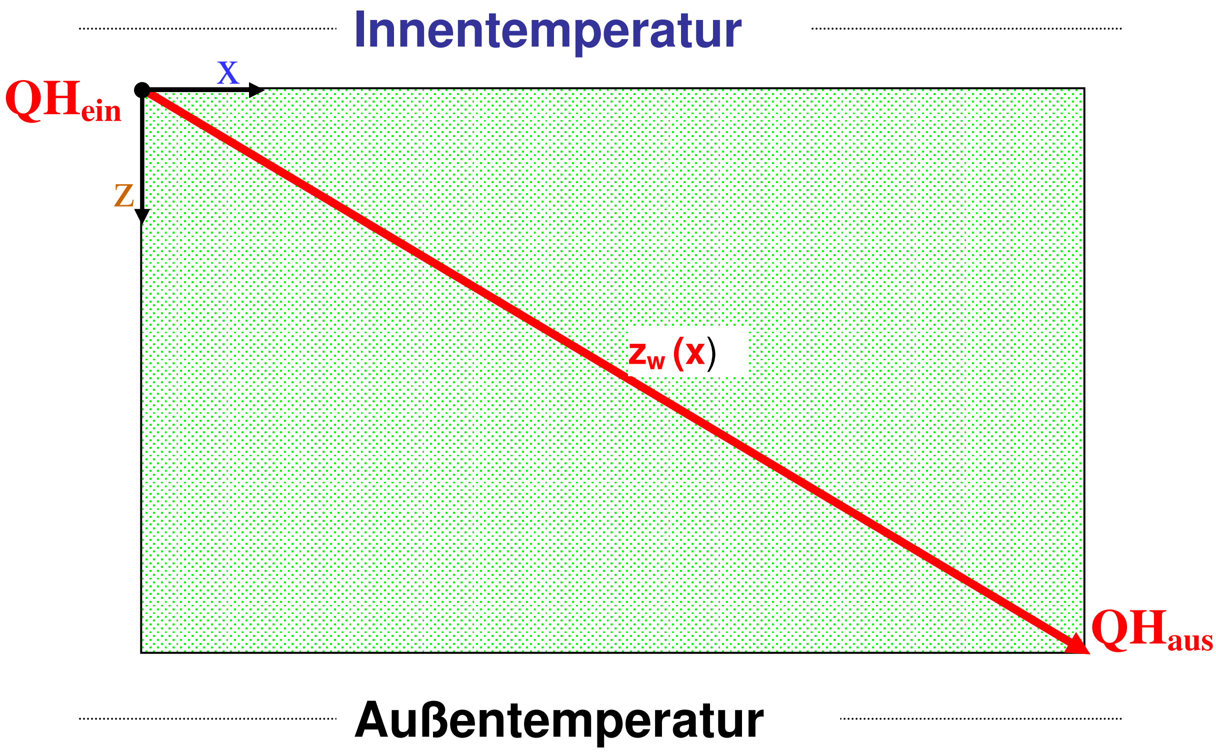

Bild 6: Diagonal durch die Außenwand geführte Heizebene (schematisch).

Die Heizebene z_W liegt nun in einer mit der x-Koordinate veränderlichen Tiefe $z_W(x)$ innerhalb der ansonsten homogen Wand und verlaufe irgendwie aber monoton (also nicht unbedingt linear wie in Bild 6 schematisch dargestellt) von z=0 bis zur außenseitigen Oberfläche der Wand z=d+D. Um uns die Behandlung bedeutungsarmer Nebeneffekte zu ersparen vernachlässigen wir den Einfluss der Übergangswiderstände zur Innen- bzw. zur Außenluft, d.h. wir setzen formal $1/h_i = 1/h_a = 0$.
Nun betrachten wir für die vorgegebene Heizebene den Verlauf des reduzierten thermischen Widerstandes $r(x) = r(z_W(x))$. Dieser startet bei $r(x=0) = 0$ und wächst monoton bis auf r = 1 an, wenn die Heizebene den Außenrand der Wand (z= d+D) erreicht.
Wir unterteilen den Widerstandsverlauf r(x) in N Intervalle mit gleicher Höhe Δr, wobei wir o.B.d.A die Zahl N als geradzahlig voraussetzen.

$$N = 1/\Delta r \tag{50}$$

Die zu den Intervallrändern gehörigen Werte der x-Koordinate bezeichnen wir mit x_j , wobei j = 0 ..N und x_0 = 0 sei.
Dann gilt also:

$$r(x_n) - r(x_{n-1}) = \Delta r = \text{const.} \qquad \text{für } n = 1 \ldots N$$

und mit r(0) = 0 :

$$r(x_n) = n * \Delta r \qquad \text{für } n = 1 \ldots N \tag{51}$$

Nun muss man darauf achten, dass Δr hinreichend klein ist, dass man im gesamten Intervall mit $r(x_n)$ (oder auch mit dem Mittelwert $r(x_n) + \Delta r /2$) rechnen kann.

Die zugehörigen reduzierten Ruhetemperaturen ergeben sich aus Gl.(31)

$$t_0(x) = t_0(z(x)) = 1 - r(x) \qquad [(31)]$$

und zeigen einen Hub zwischen den Intervallgrenzen x_n von

$$t_0(x_n) - t_0(x_{n-1}) = (1 - r(x_n)) - (1 - r(x_{n-1}) = r(x_{n-1}) - r(x_n) = - \Delta r$$

also

$$\Delta t_0 = - \Delta r \tag{52}$$

1.41 Grenzfall: Δt_W -> 0

Nun setzen wir voraus, dass der Massenfluss m des Heizmediums so klein ist, dass in der Heizebene die Temperaturdifferenz $\Delta t_W(x_n)$ zwischen Wand und Ruhetemperatur beliebig klein ist, also im Grenzfall zu Null wird:

$$\Delta t_W(x_n) = t_H(x_n) - t_0(x_n) = 0 \tag{52a}$$

und daher die Temperaturänderung des Heizmediums zwischen Anfang und Ende eines Intervalls im wesentlichen durch die Änderung der Ruhetemperatur, Δt_0, bestimmt wird. Dann verliert das Heizmedium in jedem Intervall n den auf Q^*_0 bezogenen reduzierten Wärmestrom $-\Delta q^*_H$ und erzeugt damit den Wandwärmestrom Δq^*_W

$$-\Delta q^*_H = - m * c_p / Q^*_0 * \Delta t_0 = \Delta q^*_W \tag{52b}$$

den man in jedem Intervall unter Benutzung von Gl.(15) und der Definition von (Gl.(23) individuell auf den Wärmestrom nach innen und den nach außen aufteilen kann:

$$\Delta q^*_W = \Delta q^*_i(n) + \Delta q^*_a(n) = \eta(x_n) * \Delta q^*_W + (1- \eta(x_n)) * \Delta q^*_W$$

mit

$$\Delta q^*_i(n) = \eta(x_n) * \Delta q^*_W \tag{53}$$

und

$$\Delta q^*_a(n) = (1- \eta(x_n)) * \Delta q^*_W$$

Insgesamt ergibt sich der gesamte Wandwärmestrom q^*_W .:

$$q^*_W = \sum_1^N \Delta q^*_W = N * \Delta q^*_W \tag{54}$$

,Dieser entspricht nach Gl.(52a) dem gesamten verfügbarem Heizwärmestrom q^*_H

$$- q^*_W = q^*_H = - m^*c_p / Q^*_0 * 1 \quad , \tag{54a}$$

wobei die rechts stehende 1 anzeigen soll, dass der gesamte Temperaturbereich

$$t_H(x_N) - t_H(x_0) = t_0(x_N) - t_0(x_0) = -1 \tag{54b}$$

durchfahren wird.

Die Summe über die nach innen gerichteten Wärmeströme $\Delta q^*_i(n)$ ergibt

$$q^*_i = \sum_1^N \Delta q^*_i = \Delta q^*_W * \sum_1^N \eta(x_n) \tag{55}$$

Mit Gl.(35)

$$\eta(z) = (1 - r(z)) \qquad [(35)]$$

und der Gl.(51) kann die Summe auf der rechten Seite der Gl.(55) berechnet werden:

$$\sum_1^N \eta(x_n) = N - 1/\Delta r * \sum_1^N n \tag{56}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist eine arithmetische Reihe und ergibt für das geradzahlige N:

$$\sum_1^N n = N * N/2$$

Setzt man nun nach Gl.(50) N für $1/\Delta r$ ein dann ergibt sich für Gl.(56):

$$\sum_1^N \eta(x_n) = N - N/2 = N/2 \tag{57}$$

und der **<u>gesamte Nutzwärmestrom nach innen</u>** wird zu

$$q^*_i = \Delta q^*_W * 1/2 * N$$

Das lässt sich mit Gl.(54) vereinfachen zu:

$$\boxed{q^*_i = q^*_W/2} \tag{58}$$

Eine analoge Rechnung für q^*_a erbringt , wie es der Energiesatz verlangt,

$$q^*_a = q^*_W/2$$

Wir sehen also, dass bei einer diagonalen Führung der Heizebene im Grenzfall eines so geringen Massenstromes des Heizmediums, dass die Differenz zwischen der Temperatur des Heizmediums und der Ruhetemperatur beliebig klein wird, nur die Hälfte des Wärmeinhaltes des Heizmediums als Wärmestrom nach innen und damit als Nutzwärme gewonnen werden kann. Die andere Hälfte wird als zusätzliche Verlustwärme an die Außenluft transportiert. In diesem Grenzfall tritt das Heizmedium mit der Raumtemperatur T_i in die Heizebene ein und verlässt sie an der äußeren Oberfläche der Wand mit der Außentemperatur T_a

Eine entsprechende Aussage lässt sich übrigens auch für die umgekehrte Strömungsrichtung, also von außen nach innen, treffen. So nimmt beispielsweise Außenluft, die durch eine diagonale Heizebene hinreichend langsam nach innen gesaugt wird, zwar im oben beschriebenen Grenzfall ihre gesamte Aufheizwärme q^*_H aus der Wand auf, aber der Wärmestrom von innen in die Wand wird durch diese innere Abkühlung im Grenzfall immerhin noch um ½ q^*_H erhöht. Anders ausgedrückt: Erfolgt die Aufheizung der Frischluft wie bei der „dynamischen Wärmedämmung“ durch Wärmeübertragung im Bereich der Außenwand so kann hierdurch bestenfalls die Hälfte der Aufheizwärme durch Verminderung von Wärmeverlusten über die Außenseite der Wand an die Außenluft eingespart werden.

Der Erntegrad

$$€ = q^*_i / qH^*_{ein}$$

beträgt also wg. Gl.(54a)

$$€ = [\, q^*_W/2 \,] \;/\, q^*_H] \quad = \quad [\, q^*_W/2 \,] / q^*_W$$

$$\boxed{€ = ½ \quad \text{bei} \quad \Delta t_W \;\text{->}\; 0} \qquad (59)$$

1.42 Spezialfall: Δt_W = const

Nun betrachten wir den interessanten Spezialfall, dass die Differenz $\mathbf{\Delta t_W}$ zwischen Wandtemperatur und Ruhetemperatur in der Heizebene $z_W(x)$ überall endlich und konstant ist:

$$\Delta t_W(x) \quad = \quad \Delta t_W \;=\; \text{const} \qquad (61)$$

Wir wählen also die Lage der Heizebene $z_W(x)$ so, dass Gl.(61) erfüllt ist; - weiter unten werden wir zeigen wie man hierfür bei einer vorgegebenen Wand $r(z)$ die Heizebene $z_W(x)$ konstruieren muss. Die in den obenstehenden Gln. (Gl.(50) bis Gl.(52)) vorgenommene Aufteilung der Wandstrecke x in Intervalle x_n kann für jedes $z_W(x)$ durchgeführt werden, sofern nur $r(z_W(x))$ mit x monoton ansteigt.
Das Heizfluid besitzt dann an der Länge x_n die Temperatur $t_0(z_W(x_n)) + \Delta t_W$ und an der Länge x_{n+1} die Temperatur $t_0(z_W(x_{n+1})) + \Delta t_W$.

Wegen Gl.(52)

$$\Delta t_0 \quad = \quad - \Delta r \qquad [(52)]$$

kühlt sich das Heizmedium zwischen x_{n-1} und x_n ab:

$$t_H(x_n) - t_H(x_{n-1}) \quad = [\, t_0(z_W(x_n)) + \Delta t_W \,] - [\, t_0(z_W(x_{n-1})) + \Delta t_W \,]$$
$$= \quad t_0(z_W(x_n)) - t_0(z_W(x_{n-1}))$$

Wg. Gl.(52) beträgt diese Abkühlung:

$$t_H(x_n) - t_H(x_{n-1}) \;=\; \Delta t_0 \quad = \; - \Delta r \qquad (62)$$

Dann verliert das Heizmedium in jedem Intervall n den auf Q^*_0 bezogenen reduzierten Wärmestrom $-\Delta q^*_H$ und erzeugt damit den Wandwärmestrom Δq^*_W

$$- \Delta q^*_H \;=\; - \; m * c_p / Q^*_0 \; * \Delta t_0 \;=\; \Delta q^*_W \qquad (63)$$

Dieser lässt sich in jedem Intervall unter Benutzung von Gl.(15) und der Definition von (Gl.(23) individuell auf den Wärmestrom nach innen und den nach außen aufteilen.

$$\Delta q^*_W = \Delta q^*_i(n) + \Delta q^*_a(n) \quad = \quad \eta(x_n) * \Delta q^*_W \; +(1- \eta(x_n)) * \Delta q^*_W$$

mit

$$\Delta q^*_i(n) = \quad \eta(x_n) * \Delta q^*_W \qquad (64)$$

und

$$\Delta q^*_a(n) = \quad (1- \eta(x_n)) * \Delta q^*_W$$

Nun kann man ebenso weiterrechnen wie im Abschnitt 1.41 ab Gl.(53). Insgesamt ergibt sich also nach Gl.(54), Gl.(50) und Gl.(62) der gesamte Wandwärmestrom

$$q^*_W \;=\; N * \Delta q^*_W \;=\; -\; m * c_p / Q^*_0 \tag{65}$$

und entsprechend Gl.(58)

$$\boxed{q^*_i \;=\; q^*_W /2 \qquad \text{bei konstanten } \Delta t_W .} \tag{66}$$

Nun betrachten wir die Wärme des Heizmediums.
An der Innenseite der Wand, bei $x= x_0$ mit $z_W(x_0)=0$, tritt dieses mit der Temperatur

$$t_{H\_ein} = t_H (x_0) = \; t_0(x_0) \;+\; \Delta t_W \;= 1 +\; \Delta t_W \tag{67}$$

in die Wand ein und verlässt die Wand wieder bei $x= x_N$ mit $z_W(x_N) = 1$ mit der Temperatur

$$t_{H\_aus} = t_H (x_N) = t_0(x_N) \;+\; \Delta t_W \quad = 0 + \quad \Delta t_W \tag{68}$$

Das Heizmedium gibt die Wärme

$$q^*_H(x_N) - q^*_H (x_0) = m * c_p / Q^*_0 \quad * \;\; (t_{H\_aus} - t_{H\_ein}) \;=\; -\; m*c_p / Q^*_0 \;= q^*_W$$

ab, was nach Gl.(65) gerade q^*_W entspricht.

Der Wärmeinhalt des einströmenden Heizmedium beträgt

$$q^*H_{ein} = \; q^*_H(x_0) = \; m * c_p / Q^*_0 \;\; *(1+ \Delta t_W) = q^*_W \;\; * (1+ \Delta t_W)$$

Der Erntegrad

$$\text{€} = q^*_i / qH^*_{ein}$$

beträgt also

$$\text{€} = \;\; [\, q^*_W/2 \,] \;\; / \, [\, q^*_W \;\, * (1+ \Delta t_W)]$$

$$\boxed{\text{€} = \; ½ \; / \, (1+ \Delta t_W)} \qquad \text{bei konstantem } \quad \Delta t_W \tag{70}$$

Für den Grenzfall $\Delta t_W \geq\; 0$ ergibt sich aus Gl.(70) wieder € = ½ also die Gl. (59) .

1.43 Winkelform

In den vorigen Abschnitten 1.41 und 1.42 haben wir immer vorausgesetzt, dass das Heizmedium mit der Innentemperatur T_{innen} in die diagonal durch die Außenwand geführte Heizebene eintritt. Dann ergibt sich im Grenzfall einer verschwindenden Temperaturdifferenz zwischen Heizmedium und der umgebenden Wand, also Δt_W **->** 0 , nach Gl.(59) der Erntegrad zu € = ½ .
Lässt man – notgedrungen – eine konstante endliche Temperaturdifferenz Δt_W zu, so verringert sich der Entegrad nach Gl.(70) zu € = ½ / (1+ Δt_W).

Es bleibt also noch die Frage übrig, was macht man wenn die Heizflüssigkeit am Anfang wärmer als T_{innen} ist? Nun, die Exergie einer Heizflüssigkeit wird dann am besten ausgenutzt, ,wenn die Wandheizung in einer „Winkelform“, die aus einer wandparallelen Ebene und einer schiefen Ebene besteht, geführt wird (**Bild 7**). Wir definieren daher:

„Winkelform“ = die 1. Ebene ist eine wandparallele Ebene möglichst nahe an der Innenseite der Wand. Sie dient zur optimalen Beheizung durch das Heizmittel im Temperaturbereich $T_H > T_{innen}$
die 2. Ebene ist eine daran anschließende schiefe Ebene nach außen zur Ausnutzung der vollen Temperaturdifferenz zu $T_{außen}$

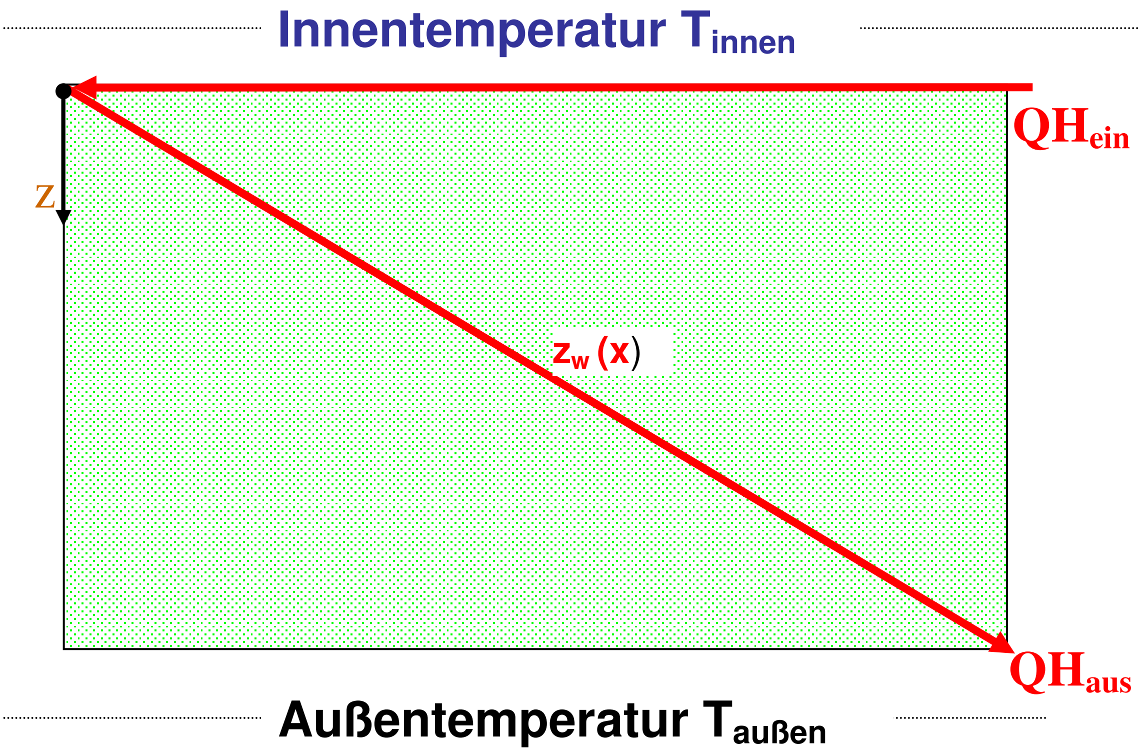

Bild 7: In Winkelform geführte Heizebene (schematisch). Bei optimaler Dimensionierung lasst sich hiermit die Exergie eines Heizmediums mit einer Anfangstemperatur TH > T_{innen} am besten ausnutzen.

****

Die Wirkung der schiefen Ebene wird dadurch begrenzt, dass in ihr im Hinblick auf den Exergieverlust sinnvollerweise nur der Ruhestrom der Wand verringert wird, aber wegen des Temperaturniveaus unterhalb von T_{innen} keine Zusatzheizung des Innenraumes mehr erfolgen kann. Bei einer gut isolierten Wand ist der Ruhestrom jedoch gering. Die diagonale Außenwandheizung ist also exergetisch optimal – aber beschränkt in ihrem Deckungsgrad **β.**

<u>Literatur:</u>

/Glück 2001/ **Glück, B.**: „Möglichkeiten des Energieeinsatzes mit niedrigem Exergiepotenzial zum Heizen und Kühlen von Räumen, GesundheitsIngenieur 122, (2001), S. 23-31.

/Kühnel 2001/ **Kühnel, W.** : "Heizen mit der Sonne im Bestand". In OTTI-Kolleg: Berichtsband des 11. Symposium Thermische Solarenergie, ISBN 3-934681-14-X, S. 515-519 , Kloster Banz -Staffelstein (2001),

/LA 2002/ **Luther, G., H. Altgeld**: "Die außenliegende Wandheizung" , GesundheitsIngenieur 123, (2002), S. 8-15 und "The outside lying Wall Heating" in A.A.M. Savigh : World renewable Energy Congress VII (WREC 2002), Köln 2002, Copyright 2002 Elsevier Sciences Ltd, Datei 07_n73.pdf

DIN 4108-6 Wärmeschutz und Energie-Einsparung in Gebäuden, Teil 6 Berechnung des Jahresheizwärmebedarfes und des Jahresheizenergiebedarfes